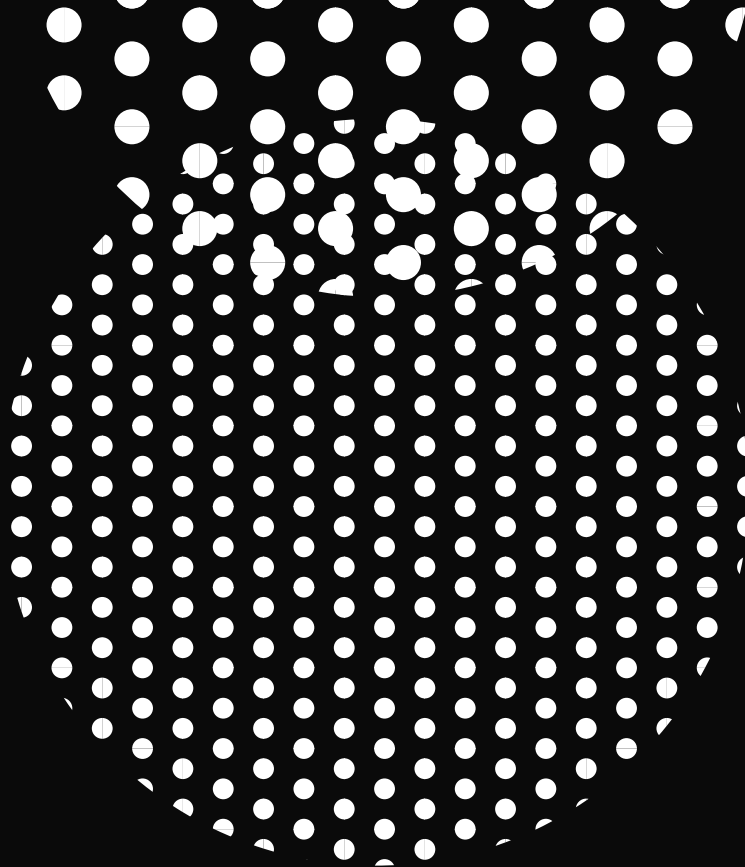




Exercise 1

Soit $t \geq 0$

$$1. E[|X|^q] = \int_{\mathbb{R}} |x|^q dP \geq \int_{|x| \geq t} |x|^q dP \geq \int_{|x| \geq t} t^q dP = t^q P(|X| \geq t)$$

$$\Rightarrow t^q P(|X| \geq t) \leq E[|X|^q]$$

$$\Leftrightarrow P(|X| \geq t) \leq \frac{1}{t^q} E[|X|^q]$$

2.

$$P(e^{\lambda X} \geq e^{\lambda t}) = P(\lambda X \geq \lambda t) = P(X \geq t) \leq$$

$$\begin{aligned} P(e^{\lambda X} \geq e^{\lambda t}) &\leq \frac{E[e^{\lambda X}]}{e^{\lambda t}} = e^{-\lambda t} E[e^{\lambda X}] = E[e^{-\lambda t} e^{\lambda X}] \\ &= E[\ln(e^{-\lambda t} e^{\lambda X})] \\ &= \frac{e(\log(E[e^{\lambda X}]))}{e^{\lambda t}} = e^{-\lambda t + \ln(E[e^{\lambda X}])} \end{aligned}$$

$$3. P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \geq t\right) = P(X_1 + \dots + X_n \geq nt) = P(e^{\lambda X_1 + \dots + \lambda X_n} \geq e^{\lambda nt})$$

$$\leq \exp(-\lambda nt + \ln(E[e^{\lambda X_1 + \dots + \lambda X_n}]))$$

$$= \exp(-\lambda nt + \ln(E[e^{\lambda X_1} \dots e^{\lambda X_n}]))$$

$$= \exp(-\lambda nt + n \ln(E[e^{\lambda X_i}])) \quad \text{car indep.}$$

$$= \exp(-n(\lambda t - \ln(E[e^{\lambda X_i}])))$$

$$\leq \exp(-n \sup_{\lambda \geq 0} (\lambda t - \ln(E[e^{\lambda X_i}])))$$

Exercise 2

Soit g bornée, on a

$$\int_{\mathbb{R}} g dP_{X+Y} = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{g(X(\omega) + Y(\omega))}_{h(X(\omega), Y(\omega))} dP(\omega)$$

↑
formule de transfert.

$$= \int_{\mathbb{R}^2} g(x+y) dP_{(X,Y)}(x,y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} g(x+y) f_X(x) f_Y(y) dx dy = \int g(z) h(z) dz$$

Fubini

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x+y) f_X(x) dx \right) f_Y(y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(z) f_X(z-y) dz \right) f_Y(y) dy$$

$$z = x+y \quad dz = dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(z) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f_X(z-y) f_Y(y) dy \right)}_{= f_X * f_Y(z) \text{ convolution}} dz$$

Donc, on a montré que:

$$\int g dP_{X+Y} = \int g(z) (f_X * f_Y)(z) dz$$

Par la méthode de la fonction caractéristique, on a montré que P_{X+Y} est la loi à densité sur $\mathbb{R}$, de densité $x \mapsto (f_X * f_Y)(x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x-u) f_Y(u) du$

Ici, on a donc $X \sim \mathcal{C}(a)$ $Y \sim \mathcal{C}(b)$ indépendantes,

$X+Y \sim$ la loi à densité, de densité

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{a}{\pi(a^2+u^2)} \cdot \frac{b}{\pi(b^2+(x-u)^2)} du = \frac{a+b}{\pi} \cdot \frac{1}{a^2+(a+b)^2}$$

Idee: décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{u^2+a^2} \cdot \frac{1}{(x-u)^2+b^2} = \frac{Au+B}{u^2+a^2} + \frac{Cu+D}{(x-u)^2+b^2}$$

1) $X_1 \sim \mathcal{C}(a)$

Par récurrence, $\underbrace{X_1 + \dots + X_n}_{\text{H.L. } \mathcal{C}(an)} + \underbrace{X_{n+1}}_{\mathcal{C}(a)} \sim \mathcal{C}(a(n+1))$

Donc $\forall n, \underbrace{X_1 + \dots + X_n}_Z \sim \mathcal{C}(an)$

On cherche la loi de $\frac{Z}{n}$. On utilise la méthode de la fonction muette.

Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée

$$\begin{aligned} \int g dP_{\frac{Z}{n}} &= \int g\left(\frac{Z(\omega)}{n}\right) dP(\omega) = \int g\left(\frac{z}{n}\right) \frac{a^n}{\pi(y^2 + a^2 n^2)} dz \\ g = g/n &= \int g(y) \frac{a^n}{\pi(ny)^2 + a^2 n^2} n dy \\ &= \int g(y) \frac{a}{\pi(y^2 + a^2)} dy \end{aligned}$$

Conclusion: $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \sim \text{Cauchy}(a)$

2. $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ ne converge pas en probabilité vers une constante.

$$\forall c, \forall \varepsilon \quad P\left(\left|\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} - c\right| \geq \varepsilon\right) = \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \frac{a}{\pi(u^2 + a^2)} du \quad \not\rightarrow 0$$

En particulier, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ ne converge pas p.s vers c .

3. Pas de contradiction car $E[|X_1|] = \int_{\mathbb{R}} \frac{a/|u|}{\pi(a^2 + u^2)} du = +\infty$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{a/|u|}{\pi(a^2 + u^2)} du$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{2}{2} \log(a^2 + A^2) = +\infty$$

Exercice 3

1. $\forall n, \quad X_n = S_n - S_{n-1}$

2. Soit $\omega \in \Omega$, si $\frac{S_n(\omega)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell(\omega)$

$$\text{alors, } \frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n} = \underbrace{\frac{S_n}{n}}_{\rightarrow \ell(\omega)} - \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{S_{n-1}}{n-1}}_{\rightarrow \ell(\omega)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell(\omega) - \ell(\omega) = 0$$

3. Si $P(\frac{S_n}{n} \text{ converge}) > 0$

$$\left\{ \left(\frac{S_n(\omega)}{n} \right)_n \text{ converge} \right\} \subseteq \left\{ \frac{X_n(\omega)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\}$$

$$\text{Donc } P\left(\frac{X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\right) > 0$$

$$\text{Donc } P\left(\frac{X_n}{n} \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\right) < 1$$

$$\forall \omega, \quad [|X_n(\omega)| \geq n \text{ i.s.}] \Rightarrow \left[\frac{X_n}{n} \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right]$$

Donc

$$P(|X_n| \geq n \text{ i.s.}) \leq P\left(\frac{X_n}{n} \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\right) < 1$$

9. Q: Peut-on avoir 2 LGN faux si $E[|X_i|] = +\infty$

R: Non, il suffit de montrer que $P(|X_n| \geq n \text{ i.s.}) = 1$

$$\text{M}_q \sum P(|X_n| \geq n) = +\infty$$

"
 $E[|X_i|]$ si X_i à valeurs dans $\mathbb{Z}$

$$E[|X|] = \sum_k P(|X| \geq k)$$

$$E[|X_i|] = \int |x| dP_X(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{\infty} \mathbb{1}_{\{u \leq |x|\}} du \right) dP_X(x)$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{u \leq |x|\}} dP_X(x) \right) du$$