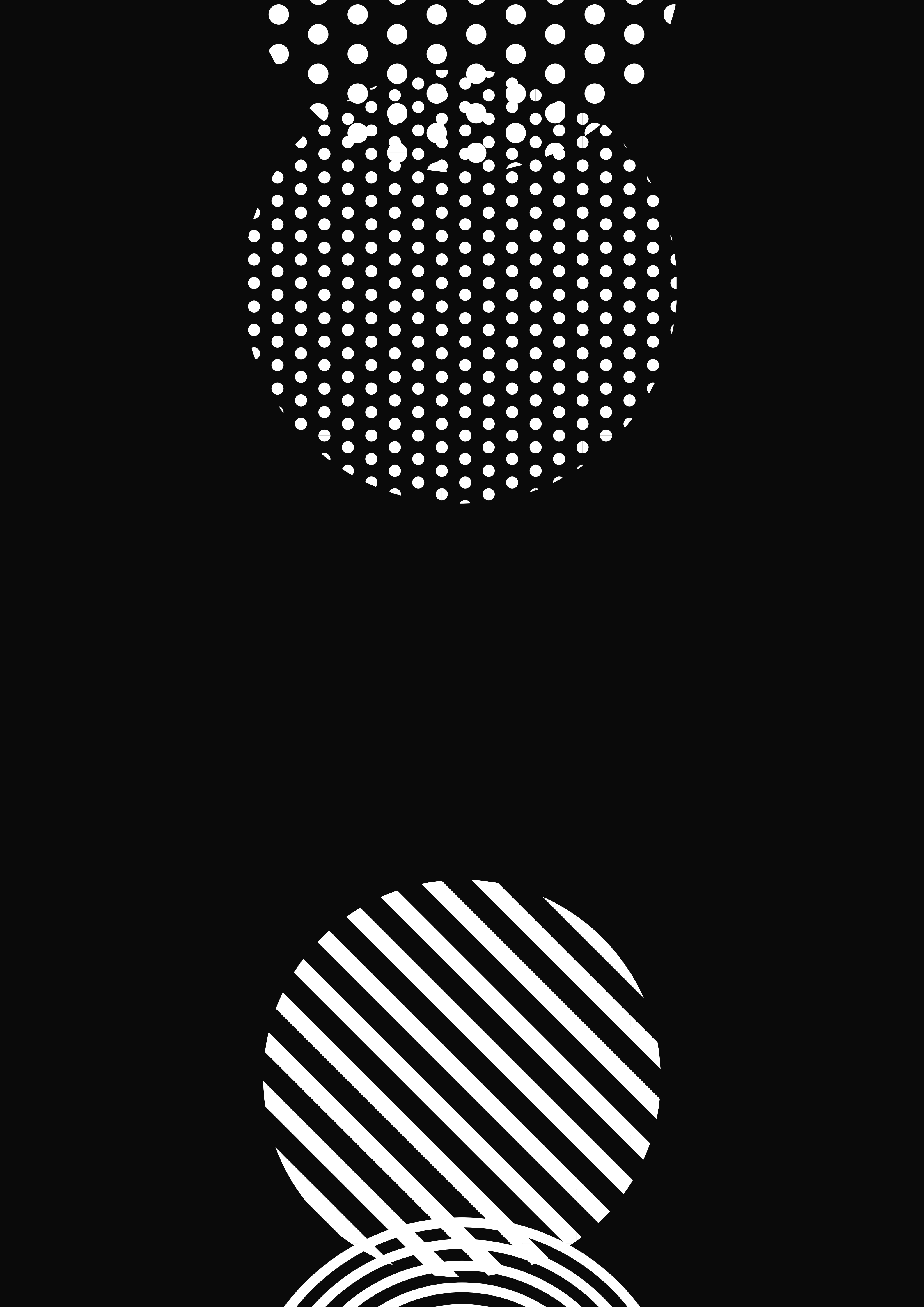


Exercice 1

1) Si $(x_i)_i$ sont des réelles, alors $\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i| = +\infty \iff \sum_{i=N}^{+\infty} |x_i| = +\infty$
car $\left(\sum_{i=1}^{N-1} |x_i| < +\infty \text{ car finie} \right)$

Donc $\left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i| = +\infty \right\} = \left\{ \sum_{i \geq N} |x_i| = +\infty \right\}$

$\in \sigma(X_N, X_{N+1}, \dots)$ pour tout N

Donc $\left\{ \sum_{n \geq 0} |X_n| = +\infty \right\} \in \bigcap_{N \geq 0} \sigma(X_m : m \geq N)$

$\left\{ \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n} (X_1 + \dots + X_n) \geq 10 \right\}$

Si $(x_i)_i$ sont des réels, on a $\frac{x_1 + \dots + x_k}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ pour tout k fixé

Donc $L = \limsup_n \frac{x_1 + \dots + x_n}{u_n} = \limsup_n \frac{x_{k+1} + \dots + x_n}{u_n}$

Donc $\left\{ \limsup_n \frac{x_1 + \dots + x_n}{u_n} \geq 10 \right\} = \left\{ \limsup \frac{X_{k+1} + \dots + X_n}{u_n} \geq 10 \right\}$

$\in \sigma(X_{k+1}, \dots)$

donc $\in \bigcap_k \sigma(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots) = \mathcal{A}$

Similairement, pour $(x_i)_i$ des réels, $\forall N$ $\max(x_1, \dots, x_N) < +\infty$
et donc $\sup_{n \geq 0} x_n = +\infty \iff \sup_{n \geq N+1} x_n = +\infty$

On en déduit que $\{\sup x_n = +\infty\} \in \sigma(X_{N+1}, X_{N+2}, \dots)$
pour tout N donc $\in \mathcal{A}$

2) $(\Omega, \mathcal{F}) = (\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$

$X_1 : \Omega \to \mathbb{R}$, $X_1(\omega) = 10 \cdot \mathbb{1}_{\{1\}}(\omega)$ pour $\omega \in \{0,1\}$

$X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $X_n(\omega) = 0$ pour $n > 1$
les X_i sont des v.a.
mais $\left\{ \omega : \sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n| \geq 10 \right\} = \{1\} \notin \mathcal{A}$

Mais $\sigma(X_2, \dots) = \sigma(X_n^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})) = \sigma(\emptyset, \Omega) = \{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{A}$
$n \geq N$

Avec les $(x_i)_i$ construits sur $(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$

on a :

$$\{\sum_n |X_n| \geq 10\} = \{X_1 \geq 10\} \notin \mathcal{A}$$

$$\{\limsup_{n\to+\infty} (X_1+\dots+X_n) \geq 10\} \neq$$

$$\{\sup_{n\geq 1} X_n \geq 10\}$$

3) Il suffit de définir P probas sur $(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$

par $P(\emptyset)=0$ $\quad P(\{0,1\})=1$ $\quad P(\{0\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{2}$

Alors les $(X_n)_{n\geq 1}$ définies à la quelle vérifie
$(X_n)_n$ mutuellement indépendantes.

$X_1 \sim \mathcal{B}er(\frac{1}{2})$ $\qquad X_n = 0$ pour $n\geq 2$

en : si $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P(X_1\in B_1, X_2\in B_2, \dots, X_n\in B_n) = P(X_1\in B_1, 0\in B_2, \dots, 0\in B_n)$$

$$= P(X_1\in B_1)\ \mathbb{1}_{0\in B_2} \dots \mathbb{1}_{0\in B_n}$$

$$= P(X_1\in B_1)\, P(X_2\in B_2) \dots P(X_n\in B_n)$$

tous les événements ont probas $P(X_1\geq 10) = \frac{1}{2}$

Exo 2

1) On pose $Z = \limsup_n X_n$.

Soit $a\in\mathbb{R}$. $\quad Z^{-1}([a,+\infty[) = \{\limsup_n X_n \geq a\}$
pour tout N_0

$= \{\forall p,$ on a $X_n \geq a-\frac{1}{p}$ ∞^t souvent$\}$
$= \{\forall p,$ on a $X_n \geq a-\frac{1}{p}$ ∞^t souvent après $n=N_0\}$
$= \bigcap_{p\geq 1} \bigcap_{N\geq N_0} \bigcup_{n\geq N} \{X_n \geq a - \frac{1}{p}\} \in \sigma(N_0, N_{0+1}, \dots)$

Donc $Z^{-1}([a,+\infty[) \in \underbrace{\bigcap_N \sigma(X_N, X_{N+1}, \dots)}_{=\mathcal{A}}$

Or $\{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}) : Z^{-1}(B)\in\mathcal{A}\}$ tribu (car $\mathcal{A}$ tribu)
contenant les $[a,+\infty[$, $a\in\mathbb{R}$ qui engendre la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Donc $\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $Z^{-1}(B)\in\mathcal{A}$

Sinon:

$\limsup_n X_n = \limsup_{n \geq N} X_n$ est $\sigma(X_N, X_{N+1}, \dots)$-mesurable

Donc $\limsup X_n$ est $\underbrace{\bigcap_N \sigma(X_N, X_{N+1}, \dots)}_{= \mathcal{A}}$-mes.

(X C_r mes.)

2) Montrer que $\exists \tilde{X}$ v.a. sur $(\Omega, \mathcal{F})$ tq $P(X = \tilde{X}) = 1$ et $\tilde{X}$ est asymptotique

pr: $\tilde{X}(\omega) = \limsup_n X_n(\omega)$ si $\omega \in \{\exists \lim X_n\}$

$= 0$ sinon

Alors $\tilde{X}$ asymptotique.

3) a) $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Q: $P(X_n \in B \ \infty^t \text{ souvent}) \in \{0,1\}$

Loi de 0-1 : $\underbrace{\{X_n \in B \ \infty^t \text{ souvent}\}}_{(*)} = \{X_n \in B \ \infty^t \text{ souvent après } n = N\}$

$\hookrightarrow$ Donc $\mathcal{A}$ la tribu asymptotique de $(X_1, X_2, \dots)$

Or les $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont indép, donc par la loi 0-1 de Kolmogorov $P(X_n \in B \ \infty^t \text{ souvent}) \in \{0,1\}$

Borel-Cantelli:

- Si $\sum P(X_n \in B) < \infty$ alors $P((*)) = 0$
- Si $\sum P(X_n \in B) = +\infty$ $\underset{X_n \text{ indép}}{\Rightarrow}$ $P((*)) = 1$

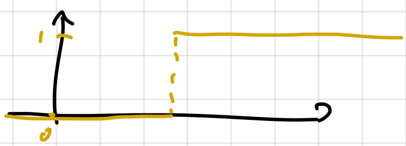
b) Soit X v.a. asymptotique pour les (X_n), (X_n) indép
Pour $c \in \mathbb{R}$, $P(X = c) \in \{0,1\}$ par la loi de 0-1 de Kolmogorov.

~~Or $\sum_{c \in \mathbb{R}} P(X = c) = 1$ donc $\exists! c \in \mathbb{R}$ $P(X = c) = 1$~~

⚠ Si X à densité $\sum_{c \in \mathbb{R}} P(X = c) = \sum 0 = 0$

On n'a pas $P(\bigsqcup_{c \in \mathbb{R}} \{X = c\}) = \sum_{c \in \mathbb{R}} P(X = c)$ car $\mathbb{R}$ pas d.

Idée: Regarder $F_X : x \mapsto P(X \leq x)$



On a F_X croissant sur $\mathbb{R}$ $\lim_{-\infty} F_X = 0$ $\lim_{+\infty} F_X = 1$
F_X à valeurs dans $\{0,1\}$ car $\{X \leq x\}$ est asymptotique pour tout x.

Une fonction F qui satisfait $(**)$ est forcément de la forme

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c \\ 1 & \text{si } x \geq c \end{cases} \quad \text{pour un } c \in \mathbb{R}$$

i.e $F = \mathbb{1}_{\{x \geq c\}}$ donc la fonction de répartition de la variable constante c.

Exercice 3

0) par exo 2 question 1, on a que $\limsup_n \frac{X_n}{u_n}$ est asymptotique pour (X_i)

Or les (X_n) sont indép., donc par Exo 2 (3, B) $\exists c \in \bar{\mathbb{R}}$, $\limsup_n \frac{X_n}{u_n} = c$

1) $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$. Par hyp., $X_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ donc

$$P(X_n > a) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{u} \underbrace{x e^{-\frac{x^2}{2}}}_{v'} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}} - \int_a^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x^2}}_{-u} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}}_{-v} dx$$

2) On a $\frac{1}{x^2} e^{-\frac{x^2}{2}} = o\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$

Donc par thm de comparaison intégrals,

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \underset{a \to +\infty}{=} o\left(\int_a^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)$$

d'où par (1) $P(X_n > a) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, a} e^{-\frac{a^2}{2}}$

3) a)

Mq $P(X_n > (\sqrt{2} + \varepsilon)\sqrt{\ln n} \text{ i.s}) = 0$

On a $P[X_n > (\sqrt{2} + \varepsilon)\sqrt{\ln n}] \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(\sqrt{2}+\varepsilon)^2 \ln n} e^{\frac{-(\sqrt{2}+\varepsilon)^2 \ln n}{2}}$

$(\sqrt{2} + \varepsilon)^2 = 2 + \delta$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(2+\delta)\ln n} e^{-(1+\frac{\delta}{2})\ln n}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(2+\delta)\, n^{1+\frac{\delta}{2}}}$$

Donc $\sum_n P(A_n) = \sum_n P(A_n) \underset{\text{par } (*)}{< +\infty}$

Par Borel-Cantelli :

$$P(X_n > (\sqrt{2}+\varepsilon)\sqrt{\ln n} \quad i.s) = 0$$

$$\{A_n \quad i.s.\}^c = \{A_n^c \text{ pour } n \text{ assez grand}\}$$

$$\subseteq \{\limsup_n X_n \leq \sqrt{2} + \varepsilon\}$$

Donc $P(\limsup X_n \leq \sqrt{2} + \varepsilon) = 1$

4] Mq $\sum P(X_n > (\sqrt{2}-\varepsilon)\ln n) = +\infty$

Par indep et B-C II $\quad P(X_n > (\sqrt{2}-\varepsilon)\sqrt{\ln n} \; i.s) = 1$

5] p.s $\left| \begin{array}{l} \limsup \frac{X_n}{\sqrt{\ln n}} \leq \sqrt{2} - \varepsilon \quad \forall \varepsilon \\ \liminf \text{———} \geq \sqrt{2} \end{array} \right.$

Donc $\frac{X_n}{\sqrt{\ln n}} \longrightarrow \sqrt{2}$