Exercice 1

1) Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Alors, $P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = P[X_n = 1] = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc $X_n \xrightarrow{\text{proba}} 0$

2)

$$E[|X_n|] = 0 \cdot P(X_n = 0) + 1 \cdot P(X_n = 1) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L^1} 0$

3)

Rappel

B-C :

Si $\sum P(A_n) < +\infty$, alors $P(A_n$ n'est vrai que pour un nombre fini de $n) = 1$

$$\overset{\shortparallel}{P\left[\bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n \geq N} A_n^c\right]}$$

Si $\sum P(A_n) = +\infty$ et les (A_n) indep tes alors $P(A_n$ ∞ vrai$) = 1$

On a $\sum_n P[X_n = 1] = \sum_n \frac{1}{n} = +\infty$

Or les évènements $(\{X_n = 1\})_{n \geq 1}$ sont indépendantes

Donc par le lemme de Borel-Cantelli (II) on a $P(\exists\ \infty^{\text{té}}$ de n tq $X_n = 1) = 1$

4) On a $\{\omega : X_n(\omega) \not\to 0\} \supseteq \{\omega : X_n(\omega) = 1$ infiniment$\}$

Donc $P(X_n \not\to 0) \geq P(X_n = 1$ infiniment de temps$) = 1$

i.e p.s $X_n \not\to 0$.

5) On peut prendre sous-suite $(Y_n)_{n \geq 1} = (X_{n^2})_{n \geq 1}$. En effet

$$\sum_{n \geq 1} P(Y_n = 1) = \sum_{n \geq 1} P(X_{n^2} = 1) = \sum_n \frac{1}{n^2} = 2 < \infty$$

Donc $P(Y_n = 1$ ∞ souvent$) = 0$ i.e $P(\{n : X_n = 1\}$ est fini$) = 1$

Or $\{\omega \in \Omega :$ On a $X_n = 1$ sur un nombre fini de fois$\}$

$\subseteq \{\omega \in \Omega : \text{pour } n \text{ assez grand } X_n = 0\}$

Donc $1 = P(X_n = 1 \text{ un nombre } < \infty \text{ de fois})$

$\leq P(X_n = 0 \text{ pour } n \text{ assez grand})$

$\leq P(X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0)$

Donc $P(X_n \to 0) = 1$ i.e $X_n \xrightarrow{p.s} 0$

<u>Exercice 2</u>

1) On a $\sum_n P(X_n \neq 0)$

$= \sum_n \frac{1}{n^2} < \infty$

Donc $P(X_n \neq 0 \text{ ∞ souvent}) = 0$

i.e $P(X_n = 0 \text{ pour } n \text{ assez grand}) = 1$

en particulier $X_n \xrightarrow{p.s} 0$

2) $E[|X_n - 0|] = 0 \cdot P(X_n = 0) + n^2 P(X_n = n^2) = 1 \quad \forall n \geq 1$

Donc $E[|X_n - 0|] \not\to 0$ donc $X_n \not\to 0$ en $\mathcal{L}^1$

<u>Exercice 3</u>

On suppose $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a.r $\underset{\parallel}{Z}$ <u>bornée</u>

1) On a $\omega \longmapsto (Z_n(\omega))_{n\geq 1} \longmapsto \limsup_n Z_n(\omega)$

$(\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$

$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\text{ouvert de } \mathbb{R}) = \sigma([a,b] : -\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$

On veut montrer que $\limsup_n X_n$ v.a. à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$

$\inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} X_k$

Il suffit donc de montrer qu'un inf ou sup de v.a.r est une variable aléatoire.

Si $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont des v.a.r. Soit $Z : \begin{cases} \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ \omega \longmapsto \sup_n Y_n(\omega) \end{cases}$

pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$ on a

$$Z^{-1}([-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega : \underset{\sup_n Y_n(\omega)}{\underset{\parallel}{Z(\omega)}} \leq a\}$$

$$= \bigcap_{n\geq 1} \{\omega \in \Omega : Y_n(\omega) \leq a\}$$

$$= \bigcap_{n\geq 1} \{Y_n \leq a\} = \bigcap_{n\geq 1} \underbrace{Y_n^{-1}(\underbrace{[-\infty, a]}_{\text{Borélien}})}_{\text{mesurable}}$$

donc l'intersection est mesurable, d'où $Z^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Les $([-\infty, a] : a \in \overline{\mathbb{R}})$ engendrent la tribu $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ (car les $[a, b] = ([-\infty, b] \cap [-\infty, a]^c) \cup [a, a])$ engendre.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lim S_n = \lim_n \sup_{k\geq n} X_n & \\ S_n = \sup_n X_n & \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} X_n \\ \quad \parallel & \\ \quad \{k : n, +\infty\} & \\ \quad \{k : n+1, +\infty\} & \end{array}}$$

2) $S = \{\omega \in \Omega : \lim_n X_n(\omega) \in \mathbb{R}\}$

$= \{\omega \in \Omega : Z(\omega) \in \mathbb{R}\}$

$= Z^{-1}(\mathbb{R})$

Or Z v.a donc S est un événement.

3) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des événements

$$\lim_n \sup A_n \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k = \lim \sup \{X_n \geq a\}$$

$$\{(\lim \sup X_n) \geq a\} = \{\omega \in \Omega : \lim \sup X_n(\omega) \geq a\}$$

$\limsup \{X_n \geq a\} = \{X_n \geq a \text{ ∞t souvent}\} \subseteq \{(\limsup X_n) \geq a\}$

$\not\supseteq$

<u>pour $\subseteq$:</u> Soit ω tq $X_n \geq a$ ∞t souvent

i.e $\forall N \; \exists n \geq N, \; X_n \geq a$

$\inf_N \underbrace{\sup_{n \geq N} X_n}_{S_n} \geq a$

$X_1, \dots, X_n(\omega)$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$1 \qquad 40 \qquad 10000$

donc $\lim_n \sup X_n(\omega) \geq a$

donc $\limsup \{X_n \geq a\} \subseteq \{\limsup X_n \geq a\}$

$\limsup \{X_n > a\} = \{X_n > a$ une infinité de fois$\}$

$\not\supseteq \quad \cup\!\!\mid$

$\{\lim_n \sup X_n > a\}$

<u>4)</u> $\liminf \{X_n \geq a\} = \bigcup_N \bigcap_{n \geq N} \{X_n \geq a\}$

$\{X_n \geq a$ pour tout n assez grand$\}$

$\cap\!\!\mid \quad \not\supseteq$

$\{\liminf X_n \geq a\}$

? intuition ?

$\emptyset \qquad \{0\}, \{1\}, \{0,1\}$