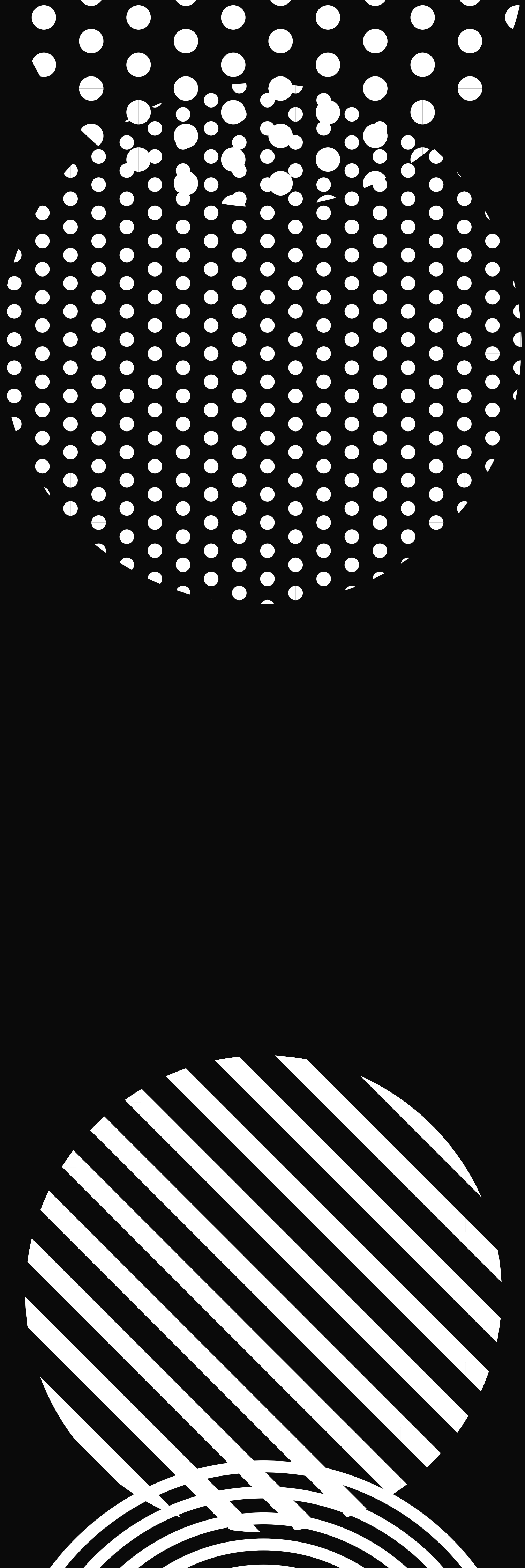

Exercice 1

0) $X_n \sim N(0, \frac{1}{n^2})$

1) Candidat limite : la loi δ_0 "Dirac en 0"

tq $\delta_0(A) = \mathbb{1}_{\{0 \in A\}}$

Pour la convergence p.s, on veut mq:

$P(X_n(\omega) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0) = 1$

(en général, $X_n \xrightarrow{P.S} X$ où X_n, X v.a sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
veut dire $P(X_n(\omega) \xrightarrow[n \to +\infty]{} X(\omega)) = 1$

Ici pour tout ω, $X_n(\omega) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
donc pour $\mathbb{P}$ presque tout ω, ——
i.e $X_n \xrightarrow{P.S} 0$

$\mathcal{L}^2$, $2>0$

Def: $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}_2} X$ où X_n, X v.a sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
ssi $|X_n|^2$ et $|X|^2$ intégrables et $E[|X_n - X|^2] \to 0$

Ici $|X_n|^2$, $|0|^2$ intégrables et $E[|X_n - 0|^2] = \frac{1}{n^2} E[\underbrace{|X|^2}_{<+\infty}]$

car $N(\mu, \sigma^2)$ a moment de tout ordre

Donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} 0$

La convergence en $\mathcal{L}^2$ implique la convergence en probabilité, d'où conclusion.

2) $Y_n = f(X_n)$ $\quad f(x) = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$

"$X_n \xrightarrow{P.S} 0$ donc $f(x_n) \xrightarrow{P.S} f(0)$" ⚠ Il faut f $\mathcal{C}^0$

Pour $n \geq 1$, $Y_n = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(\frac{1}{n}X) = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(X)$

Donc $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante presque surement
i.e $P[(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ constante$] = 1$

Donc $Y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{P.S} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(X)$ (et aussi $\mathcal{L}^2$, P)

Exercice 2

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

1] Supposons que $P(\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1$

p.s

$P(\lim_{n\to+\infty} Y_n(\omega) = Y(\omega)) = 1$

donc $P(E_1 \cap E_2) = 1$

$$\underbrace{P(E_1)}_{=1} + \underbrace{P(E_2)}_{=1} - \underbrace{P(E_1 \cup E_2)}_{=1} = 1$$

Or $E_1 \cap E_2 = \{w : X_n(w) \longrightarrow X(w),\ Y_n(w) \longrightarrow Y(w)\}$
$\subseteq \{w : X_n + Y_n(w) = X + Y(w)\}$

Donc $P(X_n(w) + Y_n(w) \xrightarrow[n\to+\infty]{} X(w) + Y(w)) = 1$

$\mathcal{L}^r, r>0$

$$|X_n + Y_n - (X+Y)|^2 = |(X_n - X) + (Y_n - Y)|^2 \overset{\text{si } r\in]0,1]}{\leq} |X_n - X|^2 + |Y_n - Y|^2$$

sinon:

Inégalité de Minkowski : $r \geq 1$

$$E[|X+Y|^2]^{\frac{1}{2}} \leq E[|X|^2]^{\frac{1}{2}} + E[|Y|^2]^{\frac{1}{2}}$$

Donc $E[|(X_n - X) + (Y_n - Y)|^2]^{\frac{1}{2}} \leq E[|X_n - X|^2]^{\frac{1}{2}} + E[|Y_n - Y|^2]^{\frac{1}{2}}$

probas

$X_n \xrightarrow{prob} X \qquad Y_n \xrightarrow{prob} Y$

Soit $\varepsilon > 0$, pour $n \geq 1$ $\quad P[|(X_n + Y_n) - (X+Y)| \geq \varepsilon]$

On a $|(X_n - X) + (Y_n - Y)| \leq |X_n - X| + |Y_n - Y|$

Donc $\{w : |(X_n + Y_n) - (X+Y)| \geq \varepsilon\} \subseteq \{w : |X_n - X| + |Y_n - Y| \geq \varepsilon\}$

Donc $P[\ldots] \leq P(|X_n - X| + |Y_n - Y| \geq \varepsilon)$
$\leq P(\{|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|Y_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}\})$
$\leq P(|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + P(|Y_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

car $X_n \xrightarrow{probas} X$, $Y_n \xrightarrow{probas} Y$

2] Identique avec 1] p. >

3] Si $X_n \xrightarrow{L^1} X$, $Y_n \xrightarrow{L^1} Y$

On n'a pas forcément $X_n Y_n$ intégrable !

On veut m.q. X, Y intégrables $\not\Rightarrow$ XY intégrable

prenons : X tq $P(X=k) = \frac{C}{k^{2+2}}$, $Y = X$

Alors $P(XY = n) = P(X^2 = n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ n'est pas un carré} \\ \frac{C}{k^{2+2}} & \text{si } n = k^2 \end{cases}$

Donc, $E[X^2] = \sum_{n \geq 0} n P(X^2 = n)$

$= \sum_{k \geq 0} k^2 P(X^2 = k^2)$

$= \sum_{k \geq 0} k^2 \frac{C}{k^{2+2}} = \sum_{k \geq 0} C = +\infty$

Donc X^2 pas intégrable.

<u>Exercice 3</u>

$Y_n = B_n B_{n+1}$ $X_n \overset{iid}{\sim} Bern(p^2)$

Pour tout $n \geq 1$, Y_n a loi $Bern(p^2)$
car $Y_n \in \{0, 1\}$ et $P(Y_n = 1) = P[X_n = 1, X_{n+1} = 1]$
$= P(X_n = 1) P(X_{n+1} = 1)$
$= p^2$

$n, m \in \mathbb{N}$ $(n \leq m)$

si $m = n$

$Cov(Y_m, Y_n) = Var(Y_n) = p^2(1-p)$

<u>Si $m = n+1$</u>

$Cov(Y_{n+1}, Y_n) = E[Y_{n+1} Y_n] - E[Y_{n+1}] E[Y_n]$

$= E[X_n X_{n+1}^2 X_{n+2}] - (p^2)^2$

$= E[X_n] E[X_{n+1}^2] E[X_{n+2}]$

$= p^3(1 - p^4)$

Si $m > n+1$

$Y_m = f(X_m, X_{m+1})$ $\quad$ $Y_n = f(X_n, X_{n+1})$

Or $\{n, n+1\} \cap \{m, m+1\} = \emptyset$ et $(X_j)_j$ mutuelle indep.

(lemme de coalition) $\sigma(X_m, X_{m+1})$ indep de $\sigma(X_n, X_{n+1})$

Donc Y_m indep de Y_n $\quad$ Donc $Cov(Y_n, Y_m) = 0$

5) $Var(Y_1 + \dots + Y_n) = E[(Y_1 + \dots + Y_n)^2] - E[(Y_1 + \dots + Y_n)]^2$

$\to$ développer + utiliser (4)

$Var(A+B) = Var(A) + Var(B) + 2Cov(A,B)$

$Var(Y_1 + (Y_2 + \dots + Y_n)) = Var(Y_1) + Var(Y_2 + \dots + Y_n) + 2Cov(Y_1, Y_2 + \dots + Y_n)$

$Y_1 = X_1 X_2$

$Y_3 = X_3 X_4$

$= Var(Y_1) + Var(Y_2 + \dots + Y_n) + 2Cov(Y_1, Y_2) + \underbrace{2Cov(Y_1, Y_3 + \dots + Y_n)}_{\text{indep } f \text{ de } Y_1 \text{ donc } = 0}$

$= Var(Y_1) + Var(Y_2 + \dots + Y_n) + 2Cov(Y_1, Y_2)$

d'où par récurrence

$$Var(Y_1 + \dots + Y_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(Y_i) + \sum_{i=1}^{n-1} 2Cov(Y_i, Y_{i+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p^2(1-p) + \sum_{i=1}^{n-1} 2\, p^3(1-p^?)$$

$$= np^2(1-p) + 2(n-1)p^3(1-p^?)$$

Exercice 4

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{i.i.d}{\sim} Unif([0,1])$

$M = \sup\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{M} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$\mathcal{M}(\omega) = \sup\{X_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\} \in [0,1]$

donc $\mathcal{M}$ est bien une v.a

$P(\mathcal{M} \leq t) =$

$\shortparallel$

$P(\cap X_i \leq t)$

$= P(X_i \leq t)^n$

$= t^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t \neq 1 \end{cases}$

Donc $\mathcal{M} \sim \delta_1$ la loi de dirac en 1.

3) $\forall i \in \mathbb{N} \quad P(X_i = 0) = 0$

donc $\forall \varepsilon \in \Omega \quad \frac{1}{X_n}(\omega) = \frac{1}{X_n(\omega)} \in [1, +\infty[$

Donc $S(\omega) = \sup\{\frac{1}{X_n(\omega)} : n \in \mathbb{N}\} \in [1, +\infty[$

donc bien définie

$S \leq t \iff \cap \frac{1}{X_n} \leq t$

$\iff \cap X_n \geq \frac{1}{t}$

$\iff \cap \underbrace{X_n \in [\frac{1}{t}, 1]}_{\in \mathcal{F}}$ donc $\in \mathcal{F}$

donc $S \leq t \in \mathcal{F}$ donc S mésurable

donc v.a

$$P(S \leq t) = P\left(\bigcap \frac{1}{X_n} \leq t\right)$$
$$= P\left(\bigcap X_n \geq \frac{1}{t}\right)$$
$$= P\left(X_1 \geq \frac{1}{t}\right)^n$$
$$= \left(1 - \frac{1}{t}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

car $\frac{1}{t} \in]0,1[$ donc $1 - \frac{1}{t} \in]0,1[$

Alors S n'a pas de loi

<u>Exercice 5</u>

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \overset{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad Y_n = \frac{X_n}{|X_n|}$

1) $P(X_n = 0) = 0$

$Y_n(\omega) = \frac{X_n(\omega)}{|X_n(\omega)|} \in \{-1, 1\}$

$Y_n = 1 \iff X_n > 0$

$Y_n = -1 \iff X_n < 0$

donc Y_n mesurable donc V.a

donc la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

$P(Y_n = -1) = P(X_n < 0) = \frac{1}{2}$

$P(Y_n = 1) = P(X_n > 0) = 1 - P(X_n < 0) = \frac{1}{2}$

Donc $Y_n \overset{i.i.d}{\sim} \mathcal{B}(\frac{1}{2})$

2) $Z_n = X_n Y_{n+1}$

$$P(Z_n < t) = P(X_n Y_{n+1} < t)$$
$$= P(X_n < t \cap Y_{n+1} = 1) + P(X_n > -t \cap Y_{n+1} = -1)$$
$$= P(X_n < t)\left(P(Y_{n+1} = 1) + P(Y_{n+1} = -1)\right)$$
$$= P(X_n < t)$$

$$F_{X_n}(t) = 1 - F_{X_n}(-t) \Rightarrow F_{X_n}(-t) = 1 - F_{X_n}(t)$$

donc $Z_n \sim N(0,1)$

4) $P(Y_n = 1 \mid X_n < 0) = 0 \neq P(Y_n = 1)P(X_n < 0)$

Donc X_n et Y_n ne sont pas indépendantes.

Z_n Y_n pas indép.

Z_n X_n pas indep.

X_n Y_m Z_q sont mutuellement independantes

si $\{(n,m,q) : (q \leq n-2 \text{ ou } q \geq n+1) \text{ et } (q \leq m-2 \text{ ou } q \geq m) \text{ et } (m \neq n)\}$

Exercice 6

1) $(X_n - X)Y + (Y_n - Y)X + (X_n - X)(Y_n - Y)$

$= \cancel{X_n Y} - \cancel{XY} + \cancel{Y_n X} - YX + X_n Y_n - \cancel{X Y_n} - \cancel{X_n Y} + \cancel{XY}$

$= X_n Y_n - XY$

2) Soit $\alpha > 0$

$$|X_n Y_n - XY| \leq |X_n - X||Y| + |Y_n - Y||X| + |X_n - X||Y_n - Y|$$

$P(|X_nY_n - XY| > 3\alpha) \leq$

$P(|X_n - X||Y| + |Y_n - Y||X| + |X_n - X||Y_n - Y| > 3\alpha)$

$= P(A_n \cap B_n \cap C_n) \leq P(A_n \cup B_n \cup C_n) \leq P(A_n) + P(B_n) + P(C_n)$

$A_n \cap B_n \cap C_n = \{|X_n - X||Y| + |Y_n - Y||X| + |X_n - X||Y_n - Y| > 3\alpha\}$

$A_n \cap B_n \cap C_n \subset A_n \cup B_n \cup C_n$

3) D'après l'inégalité de Markov,

$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad P(X \geq \lambda) \leq \frac{E[X]}{\lambda}$

$\frac{E[X]}{\lambda} < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow \quad \lambda > \frac{E[X]}{\varepsilon}$

On prends

$T = \frac{E[|Y|]}{\varepsilon}$

donc $\forall t > T, \quad P(|Y| > t) < \varepsilon$

4) Soit $t > 0$

$A_n = \{|X_n - X||Y| > \alpha\}$

$= \{|X_n - X||Y| > \frac{\alpha}{t} t\}$

$= \{|X_n - X| > \frac{\alpha}{t}\} \cap \{|Y| > t\} \subset \{|X_n - X| > \frac{\alpha}{t}\} \cup \{|Y| > t\}$

D'où $P(A_n) \leq P(|X_n - X| > \frac{\alpha}{t} \cup |Y| > t) \leq P(|X_n - X| > \frac{\alpha}{t}) + P(|Y| > t)$

$P(|X_n - X| > \frac{\alpha}{t}) = 0$ car $X_n \xrightarrow{\text{proba}} X$

$P(|X_n - X| > t) < \varepsilon \longrightarrow 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n) = 0$

Par la symétrie $P(|Y_n - Y||X| > \alpha) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

7) Par le même raisonnement,

$$|X_n - X||Y_n - Y| > \alpha = \sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha} \Leftarrow |X_n - X| > \sqrt{\alpha} \quad \text{et} \quad |Y_n - Y| > \alpha$$

d'où $P(C_n) \leq P(|X_n - X| > \sqrt{\alpha}) + P(|Y_n - Y| > \alpha)$

$\lim_{n \to +\infty} P(|X_n - X| > \sqrt{\alpha}) = 0$ car $X_n \xrightarrow{\text{proba}} X$

$\lim_{n \to +\infty} P(|Y_n - Y| > \sqrt{\alpha}) = 0$ car $Y_n \xrightarrow{\text{proba}} Y$

Donc $\lim_{n \to +\infty} P(C_n) = 0$

8) $\lim_{n \to +\infty} P(|X_n Y_n - XY| > 3\alpha) \leq \lim_{n \to +\infty} P(A_n) + P(B_n) + P(C_n)$
$= 0$

D'où $X_n Y_n$ converge vers XY en probabilité.

Exercice 7

Supposons qu'on peut construire $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tq $(X_t)_{t \in [0,1]}$ est indépendante et i.i.d $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

$\Omega = \{0,1\}^{[0,1]}$

Kolmogorov extension theorem.