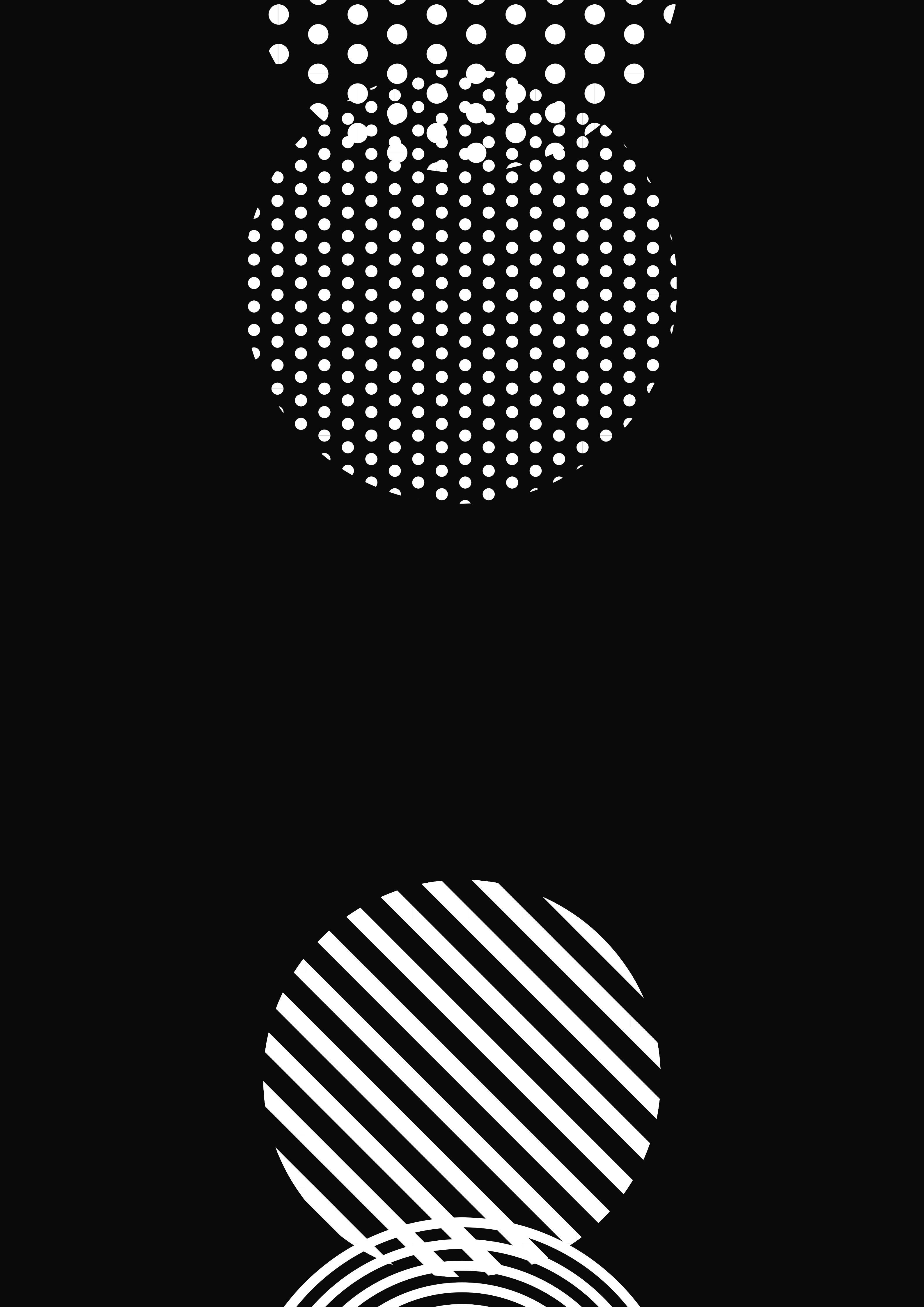


Exercice 1

0) $\left([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \dfrac{leb(\cdot \cap [0,1])}{leb([0,1])}\right)$

ça marche aussi pour $0=a$ et $b=1$ avec $a<b \in \mathbb{R}$

1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite à valeurs dans $[0,1]\cap\mathbb{Q}$

Soit $\varepsilon \to 0$

pour $n \in \mathbb{N}$

$\lambda(]a_n - \frac{\varepsilon}{2n^2}, a_n + \frac{\varepsilon}{2n^2}[) = a_n + \frac{\varepsilon}{2n} - a_n + \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{n^2}$

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} a_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{n^2} \leq \varepsilon \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}}_{cv.}$$

en faisant $\varepsilon \to 0$ on a bien

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} a_n\right) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

2) Soit $\mathcal{U} \sim \mathcal{U}nif([0,1])$

On note $(X_0, \dots)$ le développement décimal de $\mathcal{U}$

$\hookrightarrow \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$P(X_0 = 7) = P(\mathcal{U} \in [0{,}7 ; 0{,}8[) = 0{,}8 - 0{,}7 = 0{,}1$

À montrer : $\mathcal{U} = \frac{X_0}{10} + \frac{1}{10} \cdot \underbrace{10\left(\mathcal{U} - \frac{X_0}{10}\right)}_{\mathcal{U}'}$ Mq X_0 et $\mathcal{U}'$ sont indep^t et $X_0 \sim \mathcal{U}nif(\{0,\dots,9\})$ $\mathcal{U}' \sim \mathcal{U}nif([0,1])$

$k \in \{0,\dots,9\}$

On a vu $X_0 \sim \mathcal{U}nif(\{0,\dots,9\})$ et $P(\mathcal{U}' \in [a,b[\mid X_0 = k)$

$= P[10\mathcal{U} - k \in [a,b[, X_0 = k] / P(X_0 = k)$

$= P[\mathcal{U} \in [k + \frac{a}{10}, k + \frac{b}{10}[] / P(X_0 = k)$

$= \dfrac{(b-a)/10}{1/10} = b - a$

Donc $\forall k, \forall a<b$ $P(X_0 = k, \mathcal{U}' \in [a,b[) = P(X_0 = k) P(\mathcal{U}' \in [a,b[\mid X_0 = k)$

$= \frac{1}{10}\, b - a$ $\Rightarrow$ $P(\mathcal{U}' \in [a,b[)$

$= \sum_{k=0}^{9} P(X_0 = k)\, P(\mathcal{U}' \in [a,b[\mid X_0 = k)$

$= \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{10}\, b - a = b - a$

donc $\mathcal{U}' \sim \mathcal{U}nif([0,1])$

Donc $(X_0, \mathcal{U}')$ indep $X_0 \sim \mathcal{U}nif(\{0,\dots,9\})$ / $\mathcal{U}' \sim \mathcal{U}nif([0,1])$

Le développement décimal de $\mathcal{U}$ est $(X_0, \dots,)$

u et u' même loi

$P[\mathcal{U}$ n'a pas de $7] = P[X_0 \neq 7] \cdot P(\mathcal{U}'$ n'a pas de $7)$

$= \frac{9}{10} P(\mathcal{U}'$ n'a pas de $7)$

Donc $P(\mathcal{U}$ n'a pas de $7) = 0$

$p = \frac{9}{10} p \Rightarrow p = 0$

3)

$$Y = \pi(X - \tfrac{1}{2})$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable alors

$$\int f \, dP_Y = \int f(\pi \cdot (x - \tfrac{1}{2})) \, d P_X(x)$$

formule de transfert !!!

muette

$u = \pi(x - \frac{1}{2})$

$$= \int_0^1 f(\pi(x - \tfrac{1}{2})) \, dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(u) \frac{du}{\pi} = \int f(u) \frac{\mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(u)}{\pi}$$

$$= \int f(u) \, d\mu(u)$$

$\hookrightarrow \mathcal{U}nif_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$

3) On veut mq $Y \sim \mathcal{U}nif([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$

Pour (*) il suffit d'avoir $\forall f$ continue bornée sur $\mathbb{R}$

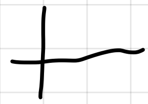
$$\int f \, dP_Y \overset{?}{=} \int f d\mu_{\hookrightarrow \mathcal{U}nif([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])}$$

$\rightarrow$ cela mq $P_Y = \mu$

$Y = h(X)$

$$\boxed{\int f(u) \, du \overset{def}{=} \int f \, d\, Leb}$$

$$\int f \, dP_Y = \int f \circ h \, dP_X$$



$f^{-1}(Y') = \{ \underbrace{h(y)}_{y} : f^{-1}(Y') \}$

3) On va mq $\forall y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $[-\frac{\pi}{2}, y]$

$$P(Y \leq y) = \frac{y + \frac{\pi}{2}}{\pi}$$

En effet, $P(Y \leq y) = P(X \leq \overbrace{\tfrac{1}{2} + \tfrac{y}{\pi}}^{\in [0,1]}] = (\tfrac{1}{2} + \tfrac{y}{\pi}) - 0 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{y}{\pi}$

4) Formule de transfert

$$\int_\Omega f(x)\, dP = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d P_X(x)$$

$\Omega = \mathbb{R}$

$X = \tan \circ Y$

$$\int f(\underbrace{\tan(Y(x))}_{=X})\, d\, \mathcal{U}nif_{[0,1]}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\, P_{\tan \circ Y}(x)$$

$$\parallel$$

$$\int f(\tan(\pi\cdot(x-\tfrac{1}{2})))\, d\, Leb_{[0,1]}(x) = \int_0^1 f(\tan(\pi\cdot(x-\tfrac{1}{2})))\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(u)\, \frac{du}{\pi(1+u^2)}$$

$= \int f(u)\, h(u)\, du = \int f\, d\mu$ où μ est la loi à densité sur $\mathbb{R}$ de densité $h : u \mapsto \frac{1}{\pi(1+u^2)}$

On a montrer que $\int f\, d P_{\tan Y} = \int f\, d\mu$ $\forall f\, C^0$, bornée

5) μ à densité h par rapport à ν ???

$\parallel$

$\mu(A) = \int_A h\, d\nu$

Exercice 2