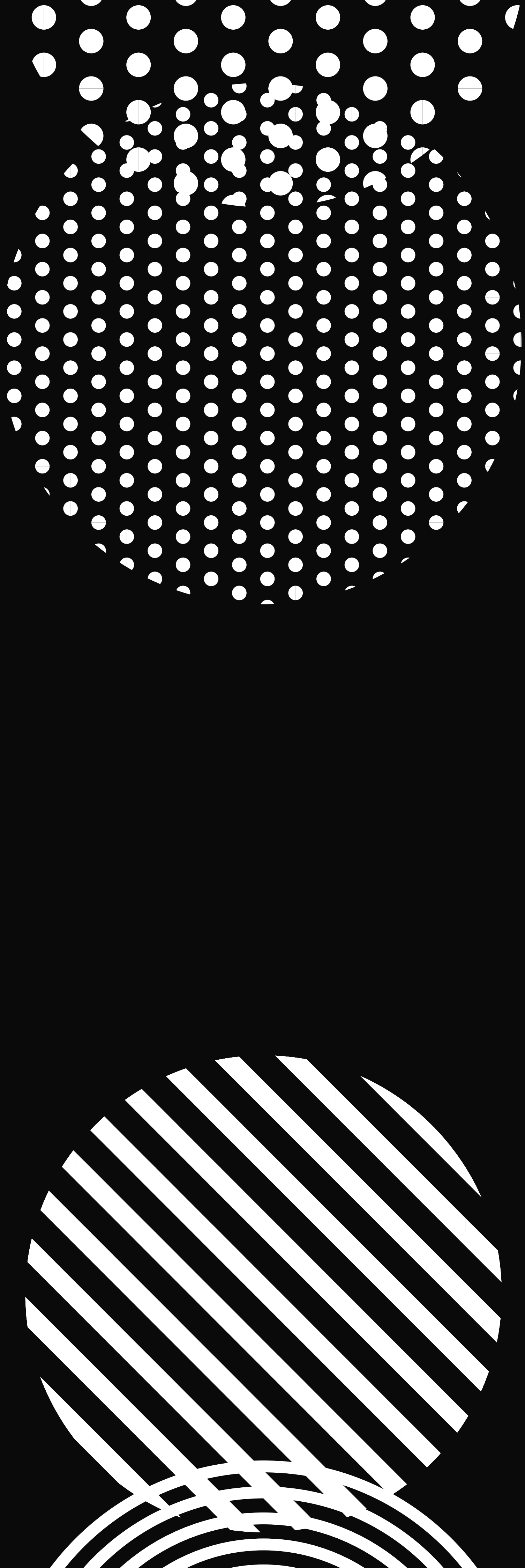

# Exercice 1

$\Omega \in A_0$ pour $1 = b$ et $0 = a$

$\emptyset \in A_0$ pour $a = b$

Soient $A, B \in E$ donc $\exists N, M \in \mathbb{N}$

tq $A = \bigcup_{n \leq N} A_n$ tq $A_n$ de la forme $]a, b]$

$B = \bigcup_{n \leq M} B_n$

D'où $A \cup B = \left( \bigcup_{n \leq N} A_n \right) \cup \left( \bigcup_{n \leq M} B_n \right) \in A_0$ car union finie des intervalles de la forme $]a, b]$

$A = ]a, b]$

$B = ]\frac{a+b}{2}, b + \frac{1-b}{2}]$

$$\boxed{\begin{gathered} (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \\ \left( ]\tfrac{a+b}{2}, b] \right)^c = ]0, \tfrac{a+b}{2}] \cup ]b, 1] \end{gathered}}$$

Soient $(a_n)$ $(b_n)$ tq $A = \bigcup_{i=0}^{n} ]a_i, b_i] \in A_0$

$A^c = \Omega \setminus \bigcup_{i=0}^{n} ]a_i, b_i] = ]0, a_0] \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} ]b_i, a_{i+1}] \cup ]b_n, 1]$

2) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} ]0, 1 - \frac{1}{n}] = ]0, 1[ \notin A_0$

3) $(]0,1[)^c = \underbrace{\{1\}}$ n'est pas de la forme $]a, b]$, donc $(]0,1[)^c \notin A_1$, d'où

$A_1$ n'est pas stable par complémentaire donc $A_1$ n'est pas un tribu.

1) Soit $A \in \mathcal{F}$ un atome

alors si $B \subset A$ et $B \in \mathcal{F}$

$B = \emptyset$ ou $B = A$

2) Soient $A, A' \in \mathcal{F}$ deux atomes

tq $A \neq A'$

$A \cap A' \subset A$ et $A \cap A' \subset A'$

donc $A \cap A' = \emptyset$ ou $A \cap A' = A = A'$ mais $A \neq A'$

donc $\underline{A \cap A' = \emptyset}$

3) $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[$ sont les atomes de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

4) $\sigma(A) = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \ : \ I \subseteq \{1, \dots, n\} \right\} = A'$

<u>pr:</u>

$A' \subset \bigcap_{\substack{\text{tribu } T \\ T \supset A}} T$ car les $\bigcup_{i \in J} A_i$ sont des unions finies d'éléments de $T$ pour tout $T$.

et $A'$ tribu car $\underset{\underset{\bigcup_{\emptyset} A_i}{\parallel}}{\emptyset} \in A'$ $\underset{\underset{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}{\parallel}}{\Omega} \in A'$

Stable par unions

si $\underset{\underset{\bigcup_{i \in J_k} A_i}{\parallel}}{B_k} \in A'$ $\forall k$

Si $B \in \mathcal{A}'$, $B = \bigcup_{i \in J} A_i$ alors $B^c = \bigcap_{i \in J} A_i^c$

$= \bigcap_{i \in J} \bigcup_{j \neq i} A_j$

$= \bigcup_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus J} A_j$

## Exo 3

1) $\mu(\emptyset) = 0$

$A_1, \dots, A_n$ disjoint

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ \text{tq } x_n \in A_1 \cup \dots \cup A_n}} p_n \delta_{x_n} = \sum_{k \leq n} \sum_{p \text{ tq } x_p \in A_k} p_p = \sum_{k \leq n} P(A_k)$$