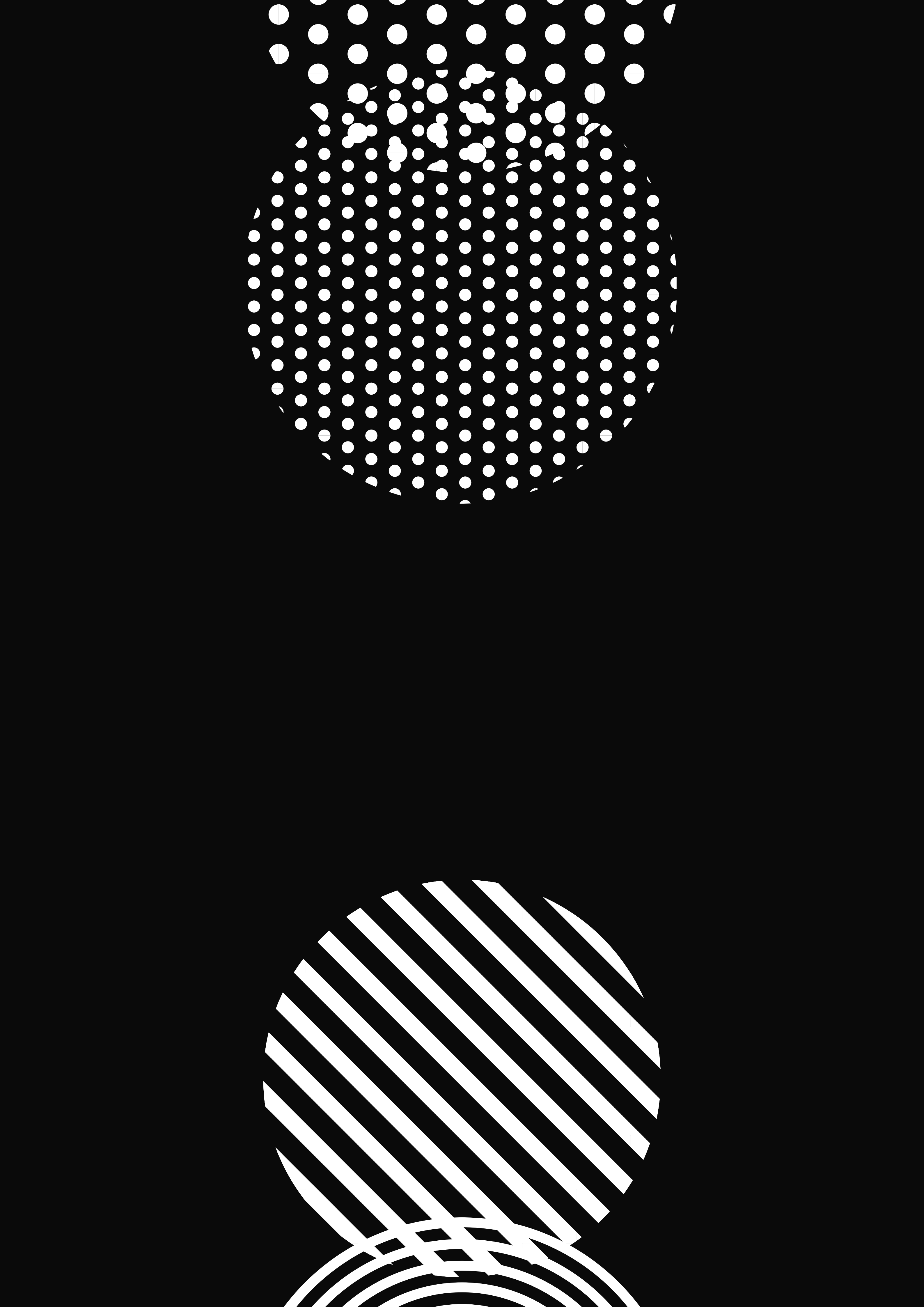

Exercice 1

1) Soit $u \in \mathbb{R}$

$$\phi_{X_n}(u) = E[e^{iu(a_n+X)}]$$

$$= E[e^{iua_n} e^{iuX}]$$

$$= e^{iua_n} E[e^{iuX}]$$

$$= e^{iua_n} \phi_X(u) \qquad \text{si } a_n \longrightarrow a$$

alors $\phi_{X_n}(u) = \phi_{a+X}(u)$

donc $a_n \to a \qquad X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a+X$

Inversement, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

- a_n bornée

Supposons par l'absurde que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non-borné

(sous-suite) $a_{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$F_{X_{k_n}}(t) = P(X_{k_n} \leq t) = P(X \leq t - a_{k_n}) = F_X(t - a_{k_n})$

$t - a_{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad F_{X_{k_n}}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

(a_n) borné

$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$

$e^{iua_n} \phi_X(u) \longrightarrow \phi_Y(u)$

- $\phi_X(0) = 1, \quad \exists\, \delta > 0, \text{ tq } u \in [-\delta, \delta], \phi_X(u) \neq 0$

$\Rightarrow \quad u \in [-\delta, \delta], \quad e^{iua_n} \longrightarrow \dfrac{\phi_Y(u)}{\phi_X(u)} = L(u)$

Mq a_n converge : Si a_n ne converge pas
$\exists$ deux sous-suites tq $a_{k_n} \to b \qquad b \neq c$
$a_{l_n} \to c$

$\forall u \in [-\delta, \delta] \qquad e^{iub} = e^{iuc} = L(u)$

$e^{iu(b-c)} = 1 \quad \to \quad \forall u \in [-\delta, \delta] \qquad u(b-c) \in 2\pi\mathbb{Z}$

On prend $u_1, u_2 \in [-\delta, \delta] \quad \dfrac{u_1}{u_2} \notin \mathbb{Q} \qquad \dfrac{u_1}{u_2} = \dfrac{u_1(b-c)}{u_2(b-c)} \in \mathbb{Q}$

contradiction

2. $X_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$

$$\phi_{X_n}(u) = (1-p+pe^{iu})^n \quad \text{où } p = \frac{\lambda}{n}$$

$$= (1+\frac{1}{n}\lambda(e^{iu}-1))^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\lambda(e^{iu}-1)} = \phi_X(u) \text{ où } X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

3. $X_n = \frac{Y_n - n}{\sqrt{n}}$ $\qquad Y_n \sim \mathcal{P}(n)$

Pour $u \in \mathbb{R}$

$$\phi_{X_n}(u) = E[e^{iu\frac{Y_n-n}{\sqrt{n}}}] = e^{-iu\sqrt{n}} E[e^{i\frac{u}{\sqrt{n}}Y_n}]$$

$$= e^{-iu\sqrt{n}} \phi_{Y_n}(\frac{u}{\sqrt{n}}) \quad \text{où } \phi_{Y_n}(t) = e^{n(e^{it}-1)}$$

$$= e^{-iu\sqrt{n}} e^{n(e^{i\frac{u}{\sqrt{n}}}-1)}$$

$$e^{i\frac{u}{\sqrt{n}}} = 1 + i\frac{u}{\sqrt{n}} - \frac{u^2}{2n} + o(\frac{1}{n})$$

$$\Rightarrow \phi_{X_n}(u) = e^{-iu\sqrt{n}} e^{n(i\frac{u}{\sqrt{n}} - \frac{u^2}{2n} + o(\frac{1}{n}))}$$

$$= e^{-iu\sqrt{n}} e^{iu\sqrt{n} - \frac{u^2}{2} + o(1)} = e^{-\frac{u^2}{2n} + o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{u^2}{2}} = \phi_X(u) \text{ où } X \sim \mathcal{N}(0,1)$$

3. $X_k \sim \mathcal{P}(\lambda_k)$, indép

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathcal{P}(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k)$$

$Y_n = Z_1 + \dots + Z_n$ où $Z_k \sim \mathcal{P}(1)$

$$X_n = \frac{\sum Z_k - nE[Z_1]}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$ par le théorème centrale limite.

4) $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$

$$\phi_{X_n}(u) = e^{iu\mu_n - \frac{1}{2}\sigma_n^2 u^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{iu\mu - \frac{1}{2}\sigma^2u^2} = \phi_X(u)$$

où $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Exercice 2

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\qquad (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes

$$P(X_n = a_n) = \frac{1}{2} = P(X_n = -a_n)$$

1) $\phi_{X_n}(u) = E[e^{iuX_n}] = \frac{1}{2}e^{iua_n} + \frac{1}{2}e^{-iua_n} = \cos(ua_n)$

Si $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad \phi_{X_n}(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 = \phi_X(u) \text{ où } X \equiv 0$$

2) $S_n = X_1 + \dots + X_n$

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi $\Rightarrow \sum_n a_n^2$ converge

Dém: $\phi_{S_n}(u) = \prod_{k=1}^{n} \phi_{X_k}(u) = \prod_{k=1}^{n} \cos(u a_k)$

$\boxed{\text{Lemme}}$ $0 < b_k \leq 1$ $\quad \prod_{k=1}^{n} b_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} L > 0$

Alors $\sum_{k=1}^{n} (1-b_k)$ converge

Dém: $\sum_{k=1}^{n} -\ln b_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln L$

$\sum_{k=1}^{n} |-\ln(b_k)|$ $\quad$ convergence de ces deux séries positifs sont équivalents.

$\sum_{k=1}^{n} (1-b_k)$

donc $\sum_{k=1}^{n} (1-b_k)$ converge $\qquad \lim_{x\to 1} \frac{-\ln x}{1-x} \to 1$

$\phi_{S_n}(u) = \prod_{k=1}^{n} \cos(u a_k) \longrightarrow \phi_S(u)$

$\phi_S(0) = 1$ $\quad \exists \delta > 0$ tq $\forall u \in [-\delta, \delta]$ $\phi_S(u) \neq 0$

donc par le lemme

$\sum_{k=1}^{n} (1-\cos(u a_k))$ converge

si on a $a_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

alors $1 - \cos(u a_k) \sim \frac{(u a_k)^2}{2}$

donc $\frac{(u a_k)^2}{2}$ converge alors $\sum_{k=1}^{n} a_k^2$ converge

$\phi_{S_n}(u) \longrightarrow \phi_S(u)$ $\quad u \in [-\delta, \delta]$, $\phi_S(u) \neq 0$

$\cos(u a_n) = \frac{\phi_{S_n}(u)}{\phi_{S_{n-1}}(u)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$\forall u \in [-\delta, \delta]$, $\cos(u a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

3) $\sum_n a_n^2$ diverge $\qquad (a_n)$ borné

$\Rightarrow Y_n = \frac{S_n}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$ converge en loi.

Dém: On mq Y_n cv. en proba

$E[X_n] = 0$, $Var(X_n) = a_n^2$

$E[Y_n] = 0$

$$Var(Y_n) = \frac{Var(S_n)}{(\sum_k a_k^2)^2} = \frac{\sum a_k^2}{(\sum a_k^2)^2} = \frac{1}{\sum a_k^2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|Y_n - 0| > \varepsilon) \underset{\text{Chebychev}}{\leq} \frac{1}{\varepsilon^2} Var(Y_n) = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{\sum a_k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $Y_n \xrightarrow{P} 0$

$Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$

Exercice 3

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v.a. dans $\mathbb{Z}$ $\quad X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

1) $P(X \in \mathbb{Z}) = 1$

thm de porte-manteau implique directement ce résultat

$\hookrightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff F$ fermé, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n \in F) \leq P(X \in F)$

($\mathbb{Z}$ fermé dans $\mathbb{R}$)

Dém : $X_n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\phi_{X_n}(2\pi) = E[e^{i2\pi X_n}] = 1$$

$$\longrightarrow \phi_X(2\pi)$$

$$\Rightarrow E[e^{i2\pi X}] = 1.$$

$E[e^{i2\pi X}] = 1 \qquad Y = e^{i2\pi X} \qquad |Y| = 1$

$$Var(Y) = E[|Y - E[Y]|^2]$$

$$= E[|Y|^2] - |E[Y]|^2$$

$$= E[1] - 1 = 0$$

$Var(Y) = 0$ alors $Y = E[Y]$ p.s

c-à-d $e^{i2\pi X} = 1$ p.s donc $X \in \mathbb{Z}$ p.s.

$P(X \in \mathbb{Z}) = 1$

(méthode Ex 4, TD10)

2. Posons $\alpha_j = P(X = j)$ on a $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j = 1$

Il suffit de mq $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = j) = \alpha_j$

$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

$F_{X_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_X(t) \quad \forall t \quad$ tq F_X continue en t

$X \in \mathbb{Z}$ p.s., alors $\quad F_X$ continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$t = j + \frac{1}{2}$ alors $F_{X_n}(j+\frac{1}{2}) \longrightarrow F_X(j+\frac{1}{2})$

$$F_{X_n}(j+\tfrac{1}{2}) = P(X_n \leq j + \tfrac{1}{2}) = P(X_n \leq j) = F_{X_n}(j)$$

$$F_X(j+\tfrac{1}{2}) = F_X(j)$$

$\forall j \in \mathbb{Z} \quad F_{X_n}(j) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_X(j)$

$$P(X_n = j) = F_{X_n}(j) - F_{X_n}(j-1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_X(j) - F_X(j-1) = \alpha_j$$

Exercice 4

1)

2) difficile (condition de Linderberg) TCL : version plus général

3. facile $\quad X_k^n \sim \mathcal{B}er(\frac{\alpha}{n})$ indépendantes

$Y_k^n \sim \mathcal{B}er(\frac{\beta}{n})$

$$U_n = \sum_{1\leq k\leq n} (\lambda X_k^n + \gamma Y_k^n)$$

$$\phi_{U_n}(u) = E[e^{iu(\sum_{1\leq k\leq n}(\lambda X_k^n + \gamma Y_k^n))}]$$

$$= \prod_{1\leq k\leq n} \phi_{X_k^n}(\lambda u)\, \phi_{Y_k^n}(\gamma u) = (1 - \tfrac{\alpha}{n} + \tfrac{\alpha}{n} e^{i\lambda u})^n (1 - \tfrac{\beta}{n} + \tfrac{\beta}{n} e^{i\gamma u})^n$$

$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(\alpha(e^{i\lambda u} - 1)) \exp(\beta(e^{i\gamma u} - 1)) = \phi_{\lambda P_\alpha + \gamma P_\beta}(u)$$

$\Rightarrow U_n \to \lambda P_\alpha + \gamma P_\beta \qquad P_\alpha \sim \mathcal{P}(\alpha) \qquad P_\beta \sim \mathcal{P}(\beta)$