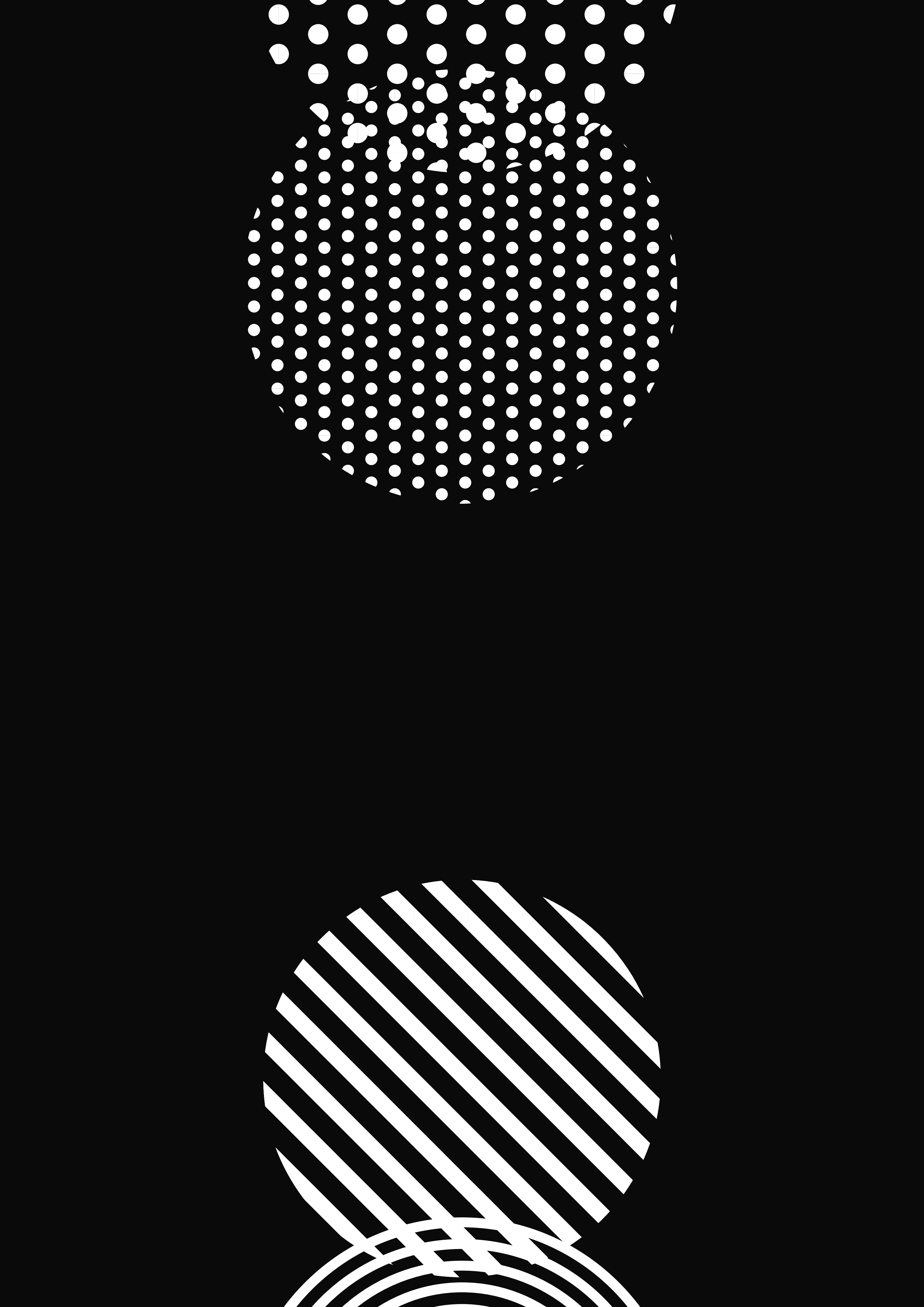

# TD 2

## Exercice 3

1) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \mu(x) \geq 0$

$\mu(\mathbb{R}) = 1$

$\mu(\emptyset) = 0$

Si on a $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Donc $\mu$ est bien une mesure de probabilité

2) $\Omega = \mathbb{N}$ $\quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$P(\{n\}) = \mu(x_n) = p_n$$

$$X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto x_n$$

$$P(X \in A) = \mu(A)$$

3) Supposons que $x_n$ est bornée. i.e $\exists \ell \in \mathbb{R}_+$ tq

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad |x_n| \leq \ell$

D'où $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |x|\, d\mu(x) \leq \int_{\mathbb{R}} \ell\, \mu(x)\,dx = \ell \int_{\mathbb{R}} \mu(x)\,dx = \ell$

car $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mu(x)\,dx = 1$

D'où $X$ est intégrable.

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x\mu(x)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n x_n$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(x)\,dx - \Big(\int_{\mathbb{R}} x\mu(x)\,dx\Big)^2$$

$$= \sum_n p_n x_n^2 - \Big(\sum_n p_n x_n\Big)^2$$

4)

## Exercice 4

1. Soit $A \in \mathcal{F}$

$A$ est dénom ou $A^c$ dénom

si $A$ dénom alors $A^c$ n'est pas dénom

mais $A = (A^c)^c$ l'est donc $A^c \in \mathcal{F}$

si $A$ n'est pas dénom, alors $A^c$ l'est et $A^c \in \mathcal{F}$
donc $\mathcal{F}$ stable par complémentaire

$\emptyset \in \mathcal{F}$

$\Omega^c = \emptyset$ dénom donc $\Omega \in \mathcal{F}$

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on étudie 3 cas :

1. $\underline{\forall n \in \mathbb{N}}$ $A_n$ est dénombrable
alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ l'est aussi donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

2. Au moins un $A_n$ est dénombrable mais pas tous, alors un des $A_n^c$ est dénombrable
d'où $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c$ est dénombrable
car un $A_n^c$ l'est d'où $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

3. Idem si aucun des $A_n$ n'est dénombrable
donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $A_n^c$ est dénom, alors d'après (2)
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

Donc $\mathcal{F}$ est une tribu.

3. Soit $\mathcal{F}'$ la tribu engendrée par les singletons

i.e $\mathcal{C} = \{\{x\} : x \in \Omega\}$

$$\mathcal{F}' = \bigcap_{\substack{A \text{ tribu} \\ \mathcal{C} \subset A}} A$$

Soit $A \in \mathcal{F}'$ donc $A \in \mathcal{F}$ si $A$ est singletons, alors $A$ dénom
si $A$ dénombrable, idem
si $A$ non-dénom, alors $A^c$ l'est
car $\mathcal{F}$ engendrée par les singletons.

Donc $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$.

Soit $A \in \mathcal{F}$ alors – $A$ dénom, $A \in \mathcal{F}'$ car $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\}$
– $A$ non dénom. symétriquement

donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ et donc $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

3. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ or $\Omega$ dénom, donc $A$ aussi
alors $A \in \mathcal{F}$ d'où $\mathcal{P}(\Omega) \subset \mathcal{F}$.

$\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ car tribu donc $\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{F}$

4) Prenons $A = ]0,1[$ qui est non dénombrable et est un élément de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$A^c = ]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ qui n'est non plus dénombrable.

Donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{F}$ d'où $\mathcal{F} \neq \mathcal{B}(\mathbb{R})$

TD 3

Exercice 2

1. $U = \min(X, 1-X) \sim \mathcal{U}nif([0, \frac{1}{2}])$
$V = \max(X, 1-X) \sim \mathcal{U}nif([\frac{1}{2}, 1])$

2. $E[U] = \frac{1}{4}$

$E[V] = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$

$\frac{E[V]}{E[U]} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

$f_{U,V}(u,v) =$

$u < v$

$X - 0 + 1 - X$

$\frac{1-v+u}{2}$

3. $V = 1 - U$

$E[f(\frac{1-U}{U})] = \int_0^{\frac{1}{2}} f(\frac{1-u}{u}) \frac{1}{\frac{1}{2}-0} \, du$
$= \int_0^{\frac{1}{2}} f(\frac{1-u}{u}) \, 2 \, du$

$x = \frac{1-u}{u} = \frac{1}{u} - 1 \Rightarrow x+1 = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{x+1}$

$du = ((x+1)^{-1})' = -1(x+1)^{-2} = -\frac{1}{(x+1)^2}$

$$x^u = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$x_\ell = +\infty$$

$$= \int_{+\infty}^{1} f(x) - \frac{1}{(x+1)^2}\, dx = \int_1^{+\infty} f(x) \frac{1}{(x+1)^2}\, dx$$

Donc $\frac{V}{U}$ est la loi à densité $x \longmapsto \frac{1}{(x+1)^2}$

4) $E[\frac{V}{U}] = \int_1^{+\infty} \frac{x}{(x+1)^2}\, dx$

$$u = x \qquad v = -\frac{1}{x+1}$$

$$u' = 1 \qquad v' = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \left[ -\frac{x}{x+1} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1}\, dx$$

$$= -1 + \frac{1}{2} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2} + \left[ \ln(x+1) \right]_1^{+\infty} = +\infty$$

## Exercice 3

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

1) $E[f(e^{-\lambda X})] = \int_0^{+\infty} f(e^{-\lambda x}) \lambda e^{-\lambda x}\, dx$

$$t = e^{-\lambda x} \qquad t^{+} = e^{-\lambda \cdot +\infty} = 0$$

$$t_{-} = e^{-\lambda \cdot 0} = 1$$

$$dt = -\lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$dt = -\lambda t\, dx \Rightarrow dx = \frac{1}{-\lambda t}\, dt$$

$$= \int_0^1 f(t) \lambda t \frac{1}{\lambda t}\, dt = \int_0^1 f(t)\, dt$$

Alors $e^{-\lambda X}$ suit la loi uniforme $[0,1]$

2)

$$E[f(\sqrt{2\lambda X})] = \int_0^{+\infty} f(\sqrt{2\lambda x})\, \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$t = \sqrt{2\lambda x} = \sqrt{2\lambda}\,\sqrt{x} \Rightarrow t^2 = 2\lambda x \Rightarrow \frac{t^2}{2\lambda} = x$$

$$dt = \sqrt{2\lambda}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{\sqrt{2\lambda}\,\sqrt{2\lambda}}{2\sqrt{2\lambda x}}\,dx = \frac{\lambda}{t}\,dx$$

$$\Rightarrow dx = \frac{t}{\lambda}\,dt$$

$$t^+ = +\infty$$

$$t^- = 0$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)\,\lambda e^{-\frac{t^2}{2}}\,\frac{t}{\lambda}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)\, t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

## TD 4

### Exercice 2

$$X(\omega) = \begin{cases} a+b & \text{si } \omega \in A \cap B \\ a & \text{si } \omega \in A \setminus B \\ b & \text{si } \omega \in B \setminus A \\ 0 & \text{si } \omega \in (A \cup B)^c \end{cases}$$

$P(X = a+b) = P(A \cap B)$

$P(X = a) = P(A)$

$P(X = b) = P(B)$

$P(X = 0) = 1 - P(A \cup B)$

$\sigma(X) = \cap A \qquad = \sigma(\{A, B, A \cap B, (A \cup B)^c\})$

Atribu

A contient

$A, B, A \cap B, (A \cup B)^c$

b)

$X$ prends des valeurs dans $[0,1]$

$P(X=1) = \frac{1}{2}$

$$P(X \in B) = \begin{cases} \frac{1}{2} + P(\frac{1}{2}B \setminus \{1\}) & \text{si } 1 \in B \\ P(\frac{1}{2}B) & \text{si } 1 \notin B \end{cases}$$

$$\sigma(X) = \sigma\left( \{ [\tfrac{1}{2}, 1] \} \cup \mathcal{P}([0, \tfrac{1}{2}]) \right)$$

c)

$X \in [0,1]$

$$P(X \in B) = P(B) + P(-B) = 2P(B) = 2\frac{\lambda(B)}{2} = \lambda(B)$$

$$\sigma(X) = \sigma(\{-B \cup B \mid B \in \mathcal{B}([0,1])\})$$

<u>Exercice 3</u>

0) $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

1) $E[X] = 0 \qquad V(X) = 1$

2) $$E[f(m+\sigma X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(m+\sigma x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$t = m + \sigma x \Rightarrow dt = \sigma dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sigma}$

$x = \frac{t-m}{\sigma}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$E[m+\sigma X] = m \qquad \mathrm{Var}(m+\sigma X) = \sigma^2$

3)

$$E[f(\frac{Y}{X})] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\frac{y}{x}) \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-x^2-y^2}{2}} dx\, dy$$

$$t = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad tx = y$$

$$dy = x\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, x \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{t x^2}{2}} dt\right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{2\pi} e^{-\frac{(x^2+t^2x^2)}{2}} dx\right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) 2 \left(\int_0^{+\infty} \frac{x}{2\pi} e^{\frac{-x^2(1+t^2)}{2}} dx\right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{2}{2\pi}\left[-\frac{e^{-\frac{x^2(1+t^2)}{2}}}{1+t^2}\right]_0^{+\infty} dt$$

$$\left(-e^{-\frac{x^2(1+t^2)}{2}}\right)' = x(1+t) e^{-\frac{x^2(1+t)}{2}}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{2\pi} \quad \frac{1}{1+t^2} dt$$

## TD 5

### Exercice 1

$X_n \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$

1. $\{w : \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} X(w) = 0\}$