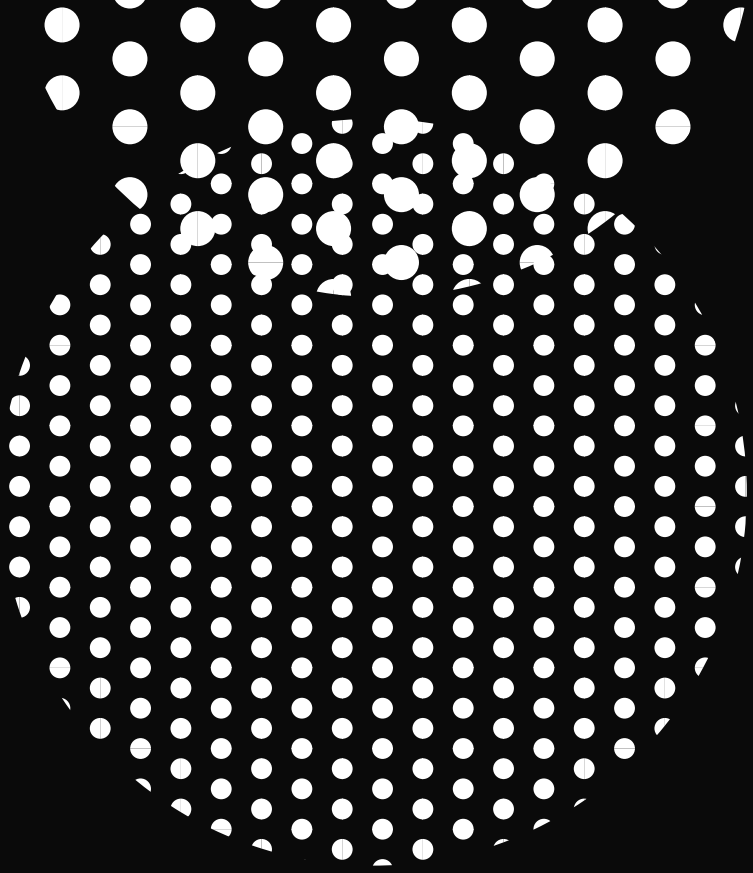

Exercice 1

1. Soit $\alpha > 0$, $t \geq 0$

$$P(|X| \geq t) = P(|X|^\alpha \geq t^\alpha) \leq \frac{E[|X|^\alpha]}{t^\alpha}$$ d'après l'inégalité de Markov

2. Soit $\lambda > 0$, $t \in \mathbb{R}$

$$P(X \geq t) = P(\lambda X \geq \lambda t) = P(e^{\lambda X} \geq e^{\lambda t}) \leq \frac{E[e^{\lambda X}]}{e^{\lambda t}}$$
$$= e^{-\lambda t} E[e^{\lambda X}] = \exp(\log(e^{-\lambda t}) + \log(E(e^{\lambda X}))$$
$$= \exp(-\lambda t + \log(E[e^{\lambda X}]))$$

3. Soit $n \geq 1$, $\lambda > 0$, $t \in \mathbb{R}$

$$P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \geq t\right) = P(X_1 + \dots + X_n \geq nt) \leq \exp(-\lambda n t + \log(E[e^{\lambda X_1} e^{\lambda X_2} \dots e^{\lambda X_n}]))$$
$$= \exp(-\lambda n t + n \log(E[e^{\lambda X_1}]))$$
$$= \exp(-n(\lambda t - \log(E[e^{\lambda X_1}])))$$

$$\forall \lambda > 0 \quad \lambda t - \log(E[e^{\lambda X_1}]) \leq \sup_{\lambda \geq 0}(\lambda t - \ln(E[e^{\lambda X_1}])) \quad ?$$

Exercice 2

1. Montrons par recurrence que si $S_n = X_1 + \dots + X_n$ avec $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d et $X_1 \sim C(a)$, alors $S \sim C(an)$

Supposons que $S_n \sim C(an)$

Cherchons la loi de $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$

Soit f bornée, mesurable. $\boxed{\text{On imagine que } b = na}$

$$E[f(S_n + X_{n+1})] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(s+x) \frac{na}{\pi((na)^2 + s^2)} \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} \, ds \, dx$$

$y = s + x \qquad dy = dx \qquad x = s - y$

alors
$$E[f(S_n + X_{n+1})] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{na}{\pi((na)^2 + s^2)} \frac{a}{\pi(a^2 + (s-y)^2)} \, ds \, dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{na}{\pi((na)^2 + s^2)} \frac{a}{\pi(a^2 + s^2 - 2sy + y^2)} \, ds \, dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{na}{\pi((na)^2 + s^2)} \frac{a}{\pi(a^2 + s^2 - 2sy + y^2)} \, ds \right) dy$$

$$\frac{na}{\pi((na)^2+s^2)}\;\frac{a}{\pi(a^2+s^2-2sg+g^2)} = n\frac{a^2}{\pi^2}\;\frac{1}{((na)^2+s^2)(a^2+(s-g)^2)}$$

$$\int \frac{As+B}{(na)^2+s^2}$$
$$= A\int \frac{s}{(na)^2+s^2}\,ds + B\int \frac{1}{(na)^2+s^2}$$
$$= A\left[\tfrac{1}{2}\ln((na)^2+s^2)\right]_{-\infty}^{+\infty} + B\left[\tfrac{1}{na}\arctan\left(\tfrac{s}{na}\right)\right]$$
$$= 0 + \frac{B}{na}\cdot\pi$$

$$\frac{1}{((na)^2+s^2)(a^2+(s-g)^2)} = \frac{As+B}{(na)^2+s^2} + \frac{Ds+C}{a^2+(s-g)^2}$$

$$\| \quad F(s)$$

$$((na)^2+s^2)\,F(s) = \frac{1}{a^2+(s-g)^2} = As+B + \frac{((na)^2+s^2)\,Ds+C}{a^2+(s-g)^2}$$

avec $s = ina$, ona

$$= \frac{1}{a^2+(ina-g)^2} = Aina + B$$

$$(*) = a^2+(ina-g)^2$$
$$= a^2-(na)^2-2inag+g^2$$
$$= (a^2-(na)^2+g^2) + i(-2nag)$$
$$= \underbrace{(g^2+a^2-(na)^2)}_{\alpha} - i\underbrace{(2(na)g)}_{\beta}$$

$$\Leftrightarrow \quad A(ina)+B = \frac{1}{\alpha-i\beta} = \frac{\alpha+i\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$
$$= \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} + i\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\alpha}{na\,(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$B = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{g^2+a^2-(na)^2}{(g^2+a^2-(na)^2)^2+(2(na)g)^2}$$

$$(a^2+(s-g)^2)\,F(s) = \frac{1}{((na)^2+s^2)} = \frac{As+B}{(na)^2+s^2}(a^2+(s-g)^2) + Ds+C$$

posons $s = ia+g$

$$= \frac{1}{(na)^2+(ia+g)^2} = D(ia+g)+C$$
$$= Dia + gD + C$$

$$\frac{1}{a^2+(ina-g)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2+(-ina+g)^2} \quad \text{sym} \quad \frac{1}{(-na)^2+(ia+g)^2}$$

donc $$D = \frac{g^2+(na)^2-(a)^2}{(g^2+(na)^2-(a)^2)^2+(2ag)^2}$$

Donc $\quad B = \dfrac{y^2+a^2-(na)^2}{\left(y^2+a^2-(na)^2\right)^2+(2(na)y)^2}$

$$D = \frac{y^2+(na)^2-(a)^2}{\left(y^2+(na)^2-(a)^2\right)^2+(2ay)^2}$$

$$\int \frac{1}{((na)^2+s^2)(a^2+(s-y)^2)} = \frac{B}{na}\pi + \frac{D}{a}\pi = B\left(\frac{\pi}{na}\right) + D\left(\frac{\pi}{a}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{y^2+a^2-(na)^2}{\left(y^2+a^2-(na)^2\right)^2+(2(na)y)^2}\,\frac{1}{na} + \frac{y^2+(na)^2-(a)^2}{\left(y^2+(na)^2-(a)^2\right)^2+(2ay)^2}\,\frac{1}{a}\right)$$

$$\left(y^2+a^2-(na)^2\right)^2+(2(na)y)^2$$

$$= y^4 + 2y^2(a^2-(na)^2) + (a^2-(na)^2)^2 + 4(na)^2y^2$$

$$= y^4 + 2y^2a^2 - 2y^2(na)^2 + (a^2-(na)^2)^2 + 4(na)^2y^2$$

$$= y^4 + 2y^2a^2 + 2y^2(na)^2 + (a^2-(na)^2)^2 = (y^2+(na)^2-(a)^2)^2+(2ay)^2 = \Delta$$

$$= (y^2+b^2-a^2)^2+(2ay)^2$$

$$= (y^2+(a-b)(a+b))^2-4ay^2$$

$$\pi\left(\frac{y^2+a^2-(na)^2}{\Delta na} + \frac{y^2+(na)^2-(a)^2}{\Delta a}\right)$$

$$= \frac{\pi}{\Delta}\left(\frac{y^2+a^2-(na)^2}{na} + \frac{y^2+(na)^2-a^2}{a}\right) = \frac{\pi}{\Delta}\left(\frac{y^2+a^2-b^2}{b} + \frac{y^2+b^2-a^2}{a}\right)$$

$$= \frac{\pi}{\Delta ab}\left(y^2a + a^2a - b^2a + y^2b + b^2b - a^2b\right)$$

$$= \frac{\pi}{\Delta ab}\left(y^2(a+b) + a^2a - b^2a + b^2b - a^2b\right)$$

$$= \frac{\pi}{\Delta ab}\left(y^2(a+b) + (a^2-b^2)a - b(a^2-b^2)\right)$$

$$= \frac{\pi}{\Delta ab}\left(y^2(a+b) + (a-b)^2(a+b)\right)$$

$$= \frac{\pi(a+b)}{\Delta ab}\left(y^2+(a-b)^2\right) = \frac{\pi(a+b)\left(y^2+(a-b)^2\right)}{ab\left(y^2+(a-b)(a+b)\right)^2+(2by)^2} = \frac{\pi(a+b)}{ab\left(y^2+(a+b)^2\right)}$$

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ab}{\pi^2}\,\frac{b}{b^2+s^2}\,\frac{a}{a^2+(s-y)^2}$

$$= \frac{ab}{\pi^2}\,\frac{\pi(a+b)}{ab\left(y^2+(a+b)^2\right)} = \frac{a+b}{\pi\left(y^2+(a+b)^2\right)}$$

donc $\quad E[f(S_n+X_{n+1})] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\frac{(n+1)a}{\pi\left(y^2+((n+1)a)^2\right)}\,dy$

donc S_{n+1} suit $C((n+1)a)$, donc par récurrence

$S_n \sim C(na)$

pour savoir $\frac{S_n}{n}$, soit f bornée, alors

$$E[f(\tfrac{S_n}{n})] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tfrac{s}{n}) \frac{na}{\pi(s^2+(na)^2)}\, ds$$

$y = \frac{s}{n} \Rightarrow dy = \frac{1}{n} ds \Rightarrow s = ny$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{an^2}{\pi((ny)^2+(na)^2)}\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{a}{\pi(y^2+a^2)}\, dy$$

Donc $\frac{S_n}{n} \sim C(a)$

2. $\forall c \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0$

$$P(|\tfrac{S_n}{n} - c| \geq \varepsilon) = \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \frac{a}{\pi(y^2+a^2)}\, dy \not\longrightarrow 0$$

donc $\frac{S_n}{n}$ ne converge pas vers une constante

3. Non, on a pas supposé que $E[|X_1|] < +\infty$.

de plus $E[|X_1|] = E[|\frac{S_n}{n}|] = \int_{\mathbb{R}} |y| \frac{a}{\pi(y^2+a^2)}\, dy$

$$= 2 \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{|y|}{\pi(y^2+a^2)}\, dy$$

$$= 2 \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \log(y^2+a^2)\right]_0^A$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\pi} \log(A^2+a^2) - \log(a^2) = +\infty$$

Exercice 3

1. Soit $n \geq 1$ $\quad X_n = S_n - S_{n-1}$

2. Soit $\omega \in \Omega$. Supposons que $\frac{S_n(\omega)}{n}$ cv.

i.e $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $\frac{S_n(\omega)}{n} \longrightarrow c$

$$\frac{X_n(\omega)}{n} = \frac{S_n(\omega) - S_{n-1}(\omega)}{n}$$

$$= \frac{S_n(\omega)}{n} - \frac{S_{n-1}(\omega)}{n} = \underbrace{\frac{S_n(\omega)}{n}}_{\to c} - \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\to 1} \underbrace{\frac{S_{n-1}(\omega)}{n-1}}_{\to c} \quad \text{donc} \longrightarrow c - c = 0$$

3S. Supposons que $P(\{\omega : \frac{S_n(\omega)}{n} \text{ cv.}\}) > 0$

$$P(\exists c, \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - c\right| < 1) \leq P(\frac{X_n(\omega)}{n} < 1)$$

Donc $P(X_n(\omega) < n) > 0$ d'où

$$P(X_n(\omega) \geq n) = 1 - P(X_n(\omega) < n) < 1.$$

4. Par la loi 0-1 de Kolmogorov

$P(|X_n| \geq n \text{ i.s}) = 0$ car $|X_n| \geq n$ i.s asymptotique et sa proba < 1.

Par contraposé, si $P(|X_n| \geq n \text{ i.s}) \neq 1$ i.e $= 1$, donc

$P(\frac{S_n}{n} \text{ cv.}) = 0$.

Donc pour que $\frac{S_n}{n}$ converge, il est nécessaire de supposer que $E[|X_1|] < +\infty$.

Exercice 1

1.

Soit $t \geq 0$

$$P(|X| \geq t) = P(|X|^\alpha \geq t^\alpha) \leq \frac{E[|X|^\alpha]}{t^\alpha}$$ inég. de Markov

2. $\lambda > 0$

Soit $t \in \mathbb{R}$

$$P(X \geq t) = P(e^{\lambda X} \geq e^{\lambda t}) = P(e^{\lambda X - \lambda t} \geq 1) \leq E[e^{\lambda X - \lambda t}]$$

$$= \exp(\ln(E[e^{\lambda X - \lambda t}]))$$

$$= \exp(\ln(e^{-\lambda t} E[e^{\lambda X}]))$$

$$= \exp(-\lambda t + \ln(E[e^{\lambda X}]))$$

3. Soit $\lambda > 0$ $t \in \mathbb{R}$

$$P(\tfrac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \geq t) = P(X_1 + \dots + X_n \geq nt) = P(e^{\lambda(X_1 + \dots + X_n)} \geq e^{\lambda n t})$$

$$= P(e^{\lambda(X_1 + \dots + X_n) - \lambda n t} \geq 1)$$

$$\leq \exp(-n\lambda t + n \ln(E[e^{\lambda X}]))$$

$$\leq \exp(-n(\lambda t - \ln(E[e^{\lambda X}])))$$

$$\leq \exp(\sup_{\lambda \geq 0}(-n(\lambda t - \ln(E[e^{\lambda X}]))))$$

$$= \exp(-n \sup_{\lambda \geq 0}(\lambda t - \ln(E[e^{\lambda X}])))$$

Exercice 3

1. $n \geq 1$ $\quad X_n = S_n - S_{n-1}$

2. $\omega \in \Omega$ supposons que $\frac{S_n(\omega)}{n}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$

donc $\frac{S_{n-1}(\omega)}{n}$ converge aussi vers $\ell \in \mathbb{R}$

alors $X_n(\omega) = \frac{S_n(\omega) - S_{n-1}(\omega)}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell - \ell = 0$

3. Supposons que $P(\frac{S_n}{n} \text{ converge}) > 0$

$\{\frac{S_n}{n} \text{ cv}\} \subset \{\frac{X_n}{n} \longrightarrow 0\}$

donc $P(\frac{X_n}{n} \longrightarrow 0) > 0$

donc $P(\frac{X_n}{n} \not\longrightarrow 0) < 1$

$\{|X_n| \geq n \text{ i.s.}\} \Rightarrow \{\frac{X_n}{n} \not\longrightarrow 0\}$

d'où $P(|X_n| \geq n \text{ i.s.}) \leq P(\frac{X_n}{n} \not\longrightarrow 0) < 1$

4.