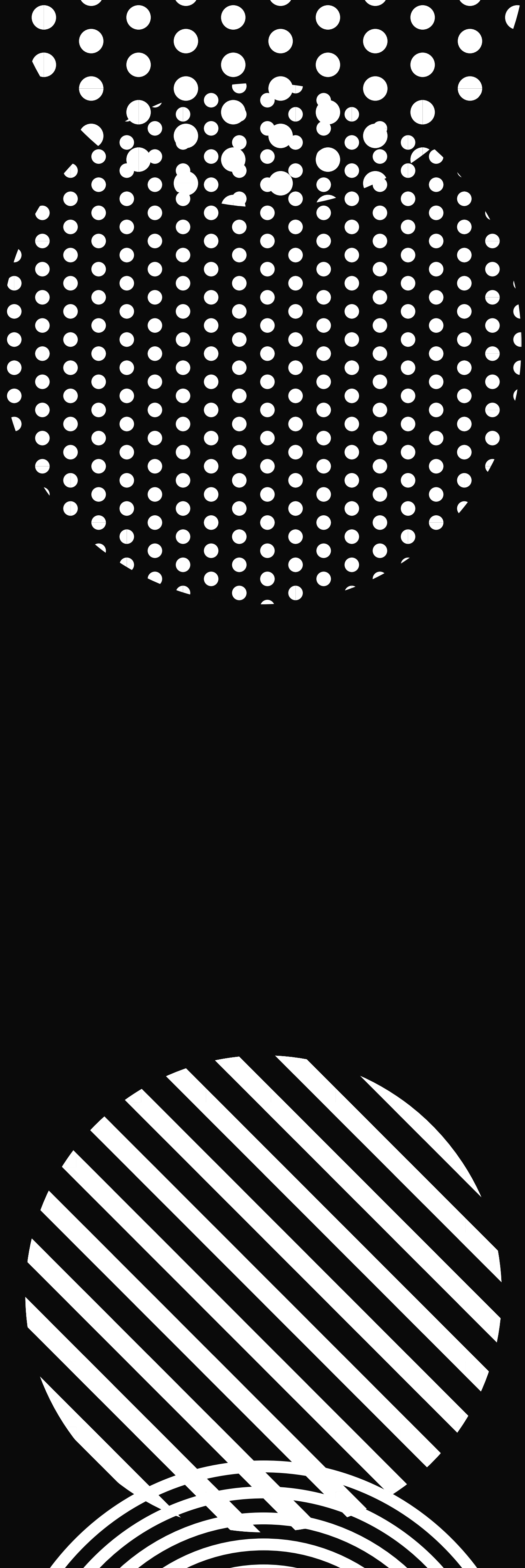


Exercice 6

Soit $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble d'élément de $\mathcal{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $N_n \in \mathcal{N}$ donc $\exists A \in \mathcal{F}$ qu'on note A_n avec $N_n \subset A_n$ tq $P(A_n)=0$

Donc on obtient un ensemble $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$

avec $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ car A_n sont tous des éléments d'un tribu $\mathcal{F}$.

De plus $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0$

Donc $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ et $P(A)=0$

De plus $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \subset A$ car $\forall n$ $N_n \subset A_n$

d'où $N \in \mathcal{N}$. D'où $\mathcal{N}$ est stable par union dénombrable.

2) Soit $Q \in \tilde{\mathcal{F}}$ donc $Q \subset \Omega$ $P(Q \setminus Q) = P(\emptyset) = 0$ donc

$Q \in \tilde{\mathcal{F}}$ donc $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}}$ d'où $\emptyset \in \tilde{\mathcal{F}}$ et $P(\emptyset)=0$

Si $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\tilde{\mathcal{F}}$ donc $\exists$ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(B)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux d'éléments de $\mathcal{F}$

avec $\forall n \in \mathbb{N}$ $A_n \subset Q_n \subset B_n$ et $P(B_n \setminus A_n)$

donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$

avec $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \setminus A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(B_n \setminus A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0$

D'où $\tilde{\mathcal{F}}$ est stable par union dénombrable

Soit $Q \in \tilde{\mathcal{F}}$ donc $\exists A, B \in \mathcal{F}$ tq $A \subset Q \subset B$

On a donc $B^c \subset Q^c \subset A^c$ avec $Q^c \subset \Omega$ et $B^c, A^c \in \mathcal{F}$ car $\mathcal{F}$ tribu

$P(B \setminus A) = 0$ $P(A^c \setminus B^c) = 0$ donc $Q^c \in \tilde{\mathcal{F}}$ donc $\tilde{\mathcal{F}}$ est stable par complémentaire d'où $\tilde{\mathcal{F}}$ est un tribu contenant $\mathcal{F}$.

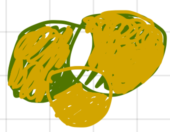
Exercice 7

1) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (\Omega \setminus (A \cap B)) \cap (A \cup B)$

$A \cup B \in \mathcal{F}$ et $A \cap B \in \mathcal{F}$ donc $(A \cap B)^c \in \mathcal{F}$

d'où $(A \cap B)^c \cap (A \cup B) \in \mathcal{F}$

donc $A \Delta B \in \mathcal{F}$.



Kolmogorov 0,1
Inégalité de Kolmogorov

2) $A \Delta B = (A \cap B)^c \cap (A \cup B)$

$B \Delta C = (B \cap C)^c \cap (B \cup C)$

$$(A \Delta B) \Delta C = \left(\left((A \cap B)^c \cap (A \cup B)\right) \cap C\right)^c \cap \left(\left((A \cap B)^c \cap (A \cup B)\right) \cup C\right)$$

$$\begin{aligned}
A \Delta (B \Delta C) &= \left(A \cap \left((B \cap C)^c \cap (B \cup C)\right)\right)^c \cap \left(A \cup \left((B \cap C)^c \cap (B \cup C)\right)\right) \\
&= A^c \cup \left((B \cap C)^c \cap (B \cup C)\right)^c \cap \left(A \cup \left((B \cap C)^c \cap (B \cup C)\right)\right) \\
&= \left(A^c \cup (B \cap C) \cup (B \cup C)^c\right) \cap \left(A \cup \left((B \cap C)^c \cap (B \cup C)\right)\right) \\
&= \left(A^c \cup (B \cap C) \cup (B^c \cap C^c)\right) \cap \left(A \cup \left((B \cap C)^c \cap (B \cup C)\right)\right)
\end{aligned}$$

$(A\cup B\cup C)\setminus (A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$= (A\cup B\cup C)\cap \left((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\right)^c$

$= (A\cup B\cup C)\cap \left[(A\cap B)^c\cap (A\cap C)^c\cap(B\cap C)^c\right)$

$(A^c\cap B^c\cap C^c)^c$

3) Ω est l'élément neutre

$\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$

$A \in \mathcal{P}(\Omega)$ donc $A^c \in \mathcal{P}(\Omega)$

$A \Delta A^c = (A\setminus A^c)\cup(A^c\setminus A) = \Omega$

D'après 2) $(\mathcal{P}(\Omega), \Delta)$ commutative.

de plus $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ $A\Delta B = B\Delta A$
donc $(\mathcal{P}(\Omega), \Delta)$ est un groupe abelien.

4) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

$\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$ $\bar{0}+\bar{1} = \bar{1}+\bar{0} = \bar{0}$ $\bar{0}+\bar{0} = \bar{0}$

5) $$1_A \underset{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{+} 1_B =$$

6) $A\Delta B = \{\omega\in\Omega : 1_A(\omega) +_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} 1_B(\omega) = 1\}$

7) $|P(A)-P(B)| = |P(B)-P(A)| \leq |P(A\setminus B)| + P(B\setminus A)| = P(A\Delta B)$