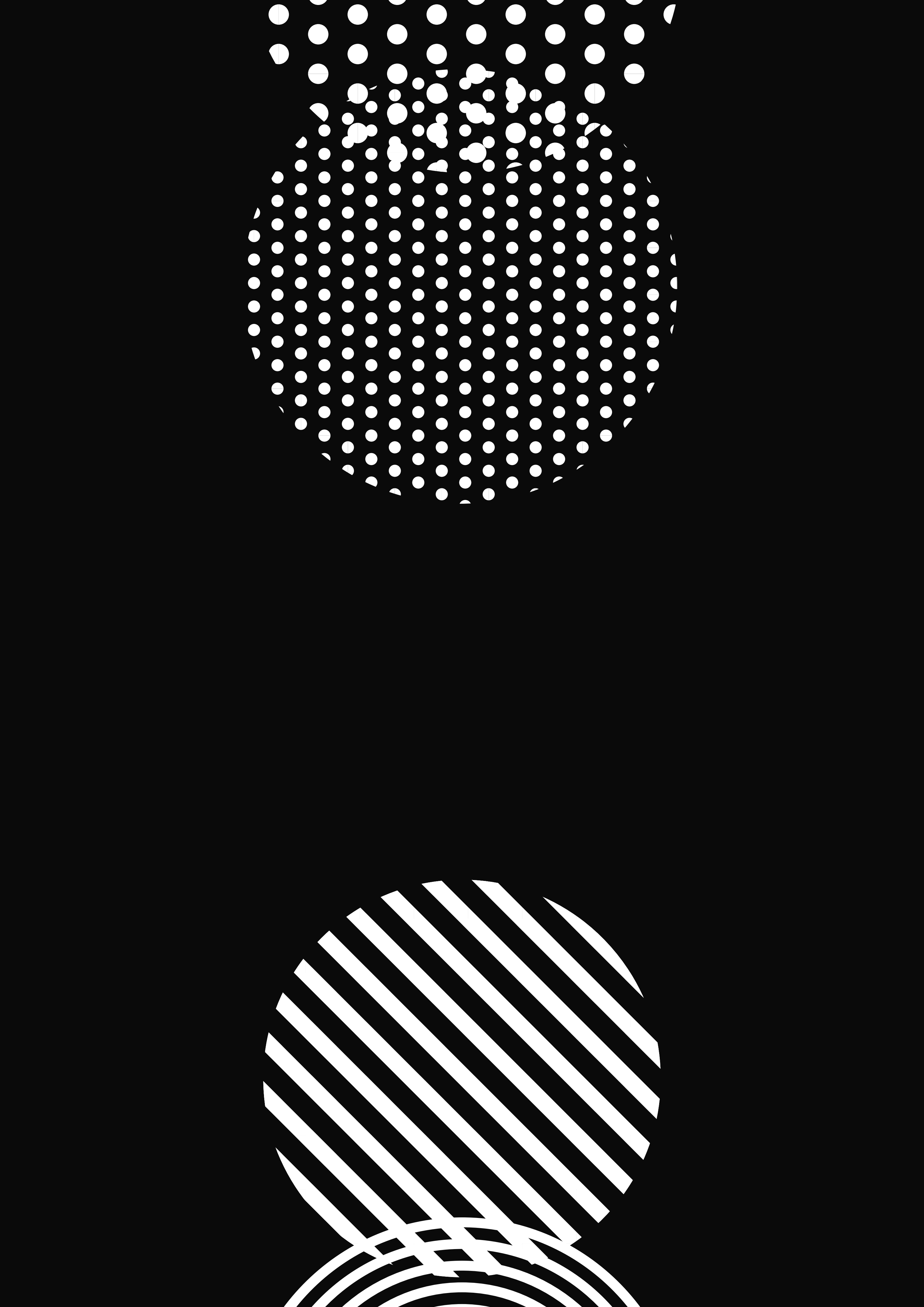

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $u \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{X_n}(u) = E[e^{iuX_n}] = E[e^{iu(a_n+X)}] = E[e^{iua_n} e^{iuX}]$$
$$= e^{iua_n} E[e^{iuX}]$$
$$= e^{iua_n} \varphi_X(u)$$

Si $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \in \mathbb{R}$ alors $\varphi_{a_n+X}(u) \longrightarrow \varphi_{a+X}(u)$

Si a_n diverge

On sait que $\varphi_{X_n}(0) = 1$ donc $\exists \delta > 0$ tq $\forall u \in [-\delta, \delta]$ $\varphi_{X_n}(u) \neq 0$

soit $u \in [-\delta, \delta]$

Supposons que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$

Donc $F_{X_n}(t) = P(X \leq t - a_n)$ si a_n diverge vers $+\infty$

alors $\forall t \in \mathbb{R}$ $F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si $a_n \to -\infty$

alors $\forall t \in \mathbb{R}$ $\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(t) = 1$ i.e en $\lim_{t\to-\infty} \lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(t) = 1$

absurde donc a_n bornée.

pour $u \in \mathbb{R}$ $e^{iua_n} \longrightarrow \dfrac{\varphi_Y(u)}{\varphi_X(u)} = \mathcal{L}(u) \in \mathbb{R}$

Or a_n est bornée donc il existe une sous-suite tq
$a_n \longrightarrow \alpha$
$a_n \longrightarrow \beta$

Or $e^{iua_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathcal{L}(u) \in \mathbb{R}$

donc la limite est unique et $\alpha = \beta$ donc a_n cv.

2. $\left((1 - \frac{\lambda}{n}) + \frac{\lambda}{n} e^{it}\right)^n = \varphi_{X_n}(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$

$= \left(1 + \frac{\lambda}{n}(e^{it} - 1)\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\lambda e^{it} - 1}$ donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

3. $X_n = \frac{Y_n - n}{\sqrt{n}}$ $\quad Y_n \sim \mathcal{P}(n)$ où $Y_n = n Y'$ avec $Y' \sim \mathcal{P}(1)$

par le Théorème Central limite

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

4. $\varphi_{X_n}(u) = e^{i\mu_n u} \cdot e^{-\sigma_n^2 \frac{u^2}{2}} \longrightarrow e^{i\mu u} \cdot e^{-\sigma^2 \frac{u^2}{2}}$

Donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Exercice 2

1. $\varphi_{X_n}(u) = E[e^{iuX_n}] = e^{ia_n u}\frac{1}{2} + e^{-a_n u i}\frac{1}{2}$

$= \cos(a_n u)$ si $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\cos(a_n u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 = \varphi_X(u)$
tq $X \equiv 0$

Supposons que $\cos(a_n u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

donc $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n u \in 2\pi k$

si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ donc $\exists\, k' \in \mathbb{N}^*$

tq $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\right) u = 2\pi k'$

pour u fixé si on prend $\delta > 0$ et posons

$u' = u + \delta$ alors $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\right) u' \neq 2\pi k'$

d'où $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ forcément.

2. $S_n = X_1 + \dots + X_n$

Supposons que S_n converge en loi.

i.e $\varphi_{S_n}(u) = \varphi_{X_1 + \dots + X_n}(u) = \varphi_{X_1}(u) \dots \varphi_{X_n}(u)$

$= \cos(a_1 u) \dots \cos(a_n u) \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}$

$\mathrm{Var}(X_n) = E[X_n]^2 - E[X_n^2] = a_n^2$

$\mathrm{Var}(S_n) = \sum a_n^2$ car X_n indépendantes

On suppose que $\cos(a_1 u) \cdots \cos(a_n u)$ converge en loi

Or $\varphi_{S_n}(0) = 1$ donc $\exists \delta > 0$ tq $\forall u \in [-\delta, \delta]$ $\varphi_{S_n}(u) \neq 0$

donc $\varphi_{S_n}(u) \longrightarrow \varphi_S(u)$ donc par le lemme

$\sum_{k=1}^{n} 1 - \cos(a_k u)$ converge

$\cos(a_n u) = \frac{\varphi_{S_n}(u)}{\varphi_{S_{n-1}}(u)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc d'après I $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$1 - \cos(a_k u) \sim \frac{(a_k u)^2}{2}$

d'où $\sum_{k=1}^{n} a_k^2$ converge

3.

$\lim_{n\to+\infty} P(|S_n| > \varepsilon) \leq \frac{Var(S_n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{\sum_n a_k^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$Var(S_n) = \frac{\sum a_k^2}{(\sum a_k^2)^2} = \frac{1}{\sum a_k^2}$

donc S_n cv en proba vers $S = 0$ donc

S_n cv en loi.