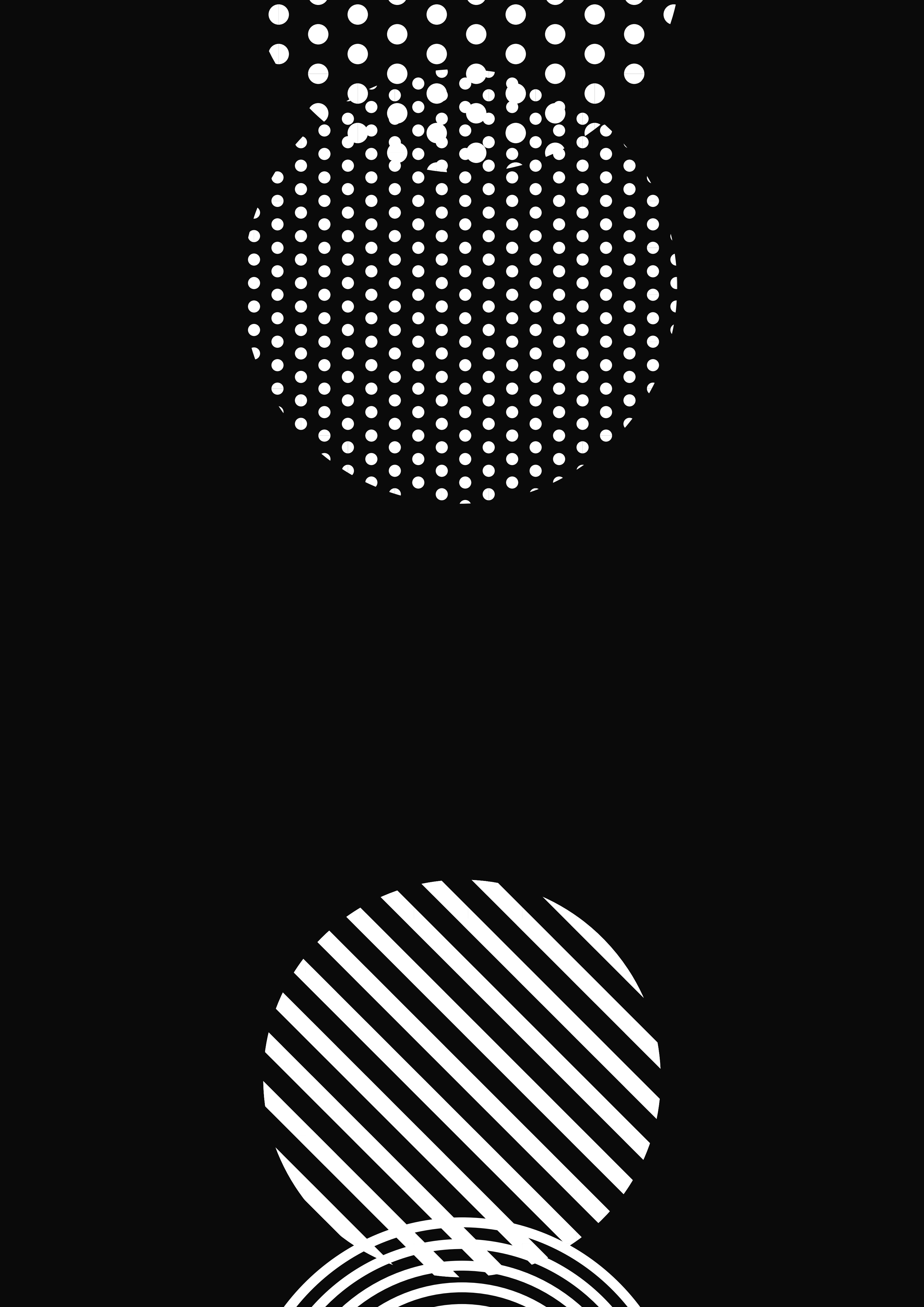

Exercice 1

1. (i) Si $\sum_{i=1}^{+\infty} |X_i| = +\infty$ donc $\forall M \in \mathbb{N}$ $\sum_{i=M}^{+\infty} |X_i| = +\infty$

car $\sum_{i=1}^{M-1} |X_i| < +\infty$ car finie

Donc $\{\sum_{i=1}^{+\infty} |X_i| = +\infty\} = \{\sum_{i=M}^{+\infty} |X_i| = +\infty\}$

D'où $\{\sum_{i=1}^{+\infty} |X_i| = +\infty\} \in \bigcap_{N\geq 0} \sigma(X_M : M \geq N)$

(ii) Si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des réels

alors $\frac{x_1 + \dots + x_k}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} = 0$

$\mathcal{L} = \limsup_n \frac{x_1 + \dots + x_n}{u_n} = \limsup_n \frac{x_{k+1} + \dots + x_n}{u_n}$

D'où $\{\limsup_n \frac{1}{u_n}(X_1 + \dots + X_n) \geq 0\} \in \bigcap_{N\geq 0} \sigma(X_M : M \geq N)$

(iii) pour $k \in \mathbb{N}$ $\sup_{n\in [\![1,k]\!]} X_n < +\infty$ car un nombre fini de v-a

donc $\sup_{n\geq 1} X_n = +\infty \Rightarrow \sup_{n\geq k} X_n = +\infty$

donc $\{\sup_{n\geq 1} X_n = +\infty\} \in \bigcap_{N\geq 0} \sigma(X_M : M \geq N)$

2)

Exercice 2

1. $\liminf_n X_n = \bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n\geq N} X_n$

$\limsup_n X_n = \bigcap_{N\geq 1} \bigcup_{n\geq N} X_n$

2. Supposons que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv. p.s vers X

$P(\{w : \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$

$\{\omega : \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = \{w : \lim_{n\geq k} X_n(w) = X(\omega)\}$

$\in \bigcap_{k\geq 1} \sigma(X_k, \dots)$

donc X est asymptotique pour X_n

3) b)

Exercice 3

0) D'après 2 si X est asymptotique alors $P(X=c)=1$

Alors notons $X = \limsup_n \frac{X_n}{u_n}$ qui est asymptotique

donc $\exists c \in \overline{\mathbb{R}}$ tq $P(X=c)=1$

i.e

$$\limsup_n \frac{X_n}{u_n} = c$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $a \in \mathbb{R}$

Or X_n suit $\mathcal{N}(0,1)$ donc $F(a) = P(X_n \leq a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$F(a) = 1 - F(-a)$

$$1 - F(a) = 1 - 1 + F(-a) = F(-a) = \int_{-\infty}^{-a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \int_{a}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \int_{a}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{u} \underbrace{x e^{-\frac{x^2}{2}}}_{v'} dx \qquad v = -e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= \left[-\frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= 0 + \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}} - \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}} - \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

2) $\frac{1}{x^2} e\left(-\frac{x^2}{2}\right) \sim o\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$

alors par le théorème de comparaison des intégrals

$$\int_a^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} e\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right) dx = o\left(\int_a^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)$$

d'où par (1) $\quad P(X_n > a) \sim \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}}$

3) (a) Soit $\varepsilon > 0$ $\qquad A_n = \{ X_n > (\sqrt{2}+\varepsilon)\sqrt{\ln n}$

$$P(A_n) = P(X_n > (\sqrt{2}+\varepsilon)\sqrt{\ln n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{2}+\varepsilon)\sqrt{\ln n}} \exp\left(-\frac{(\ln n)(2+\delta)}{2}\right)$$

$$\left((\sqrt{2}+\varepsilon)\sqrt{\ln n}\right)^2 = (\ln n)(2+\delta)$$

$$(\sqrt{2}+\varepsilon)^2 = 2 + 2\sqrt{2}\varepsilon + \varepsilon = 2+\delta$$