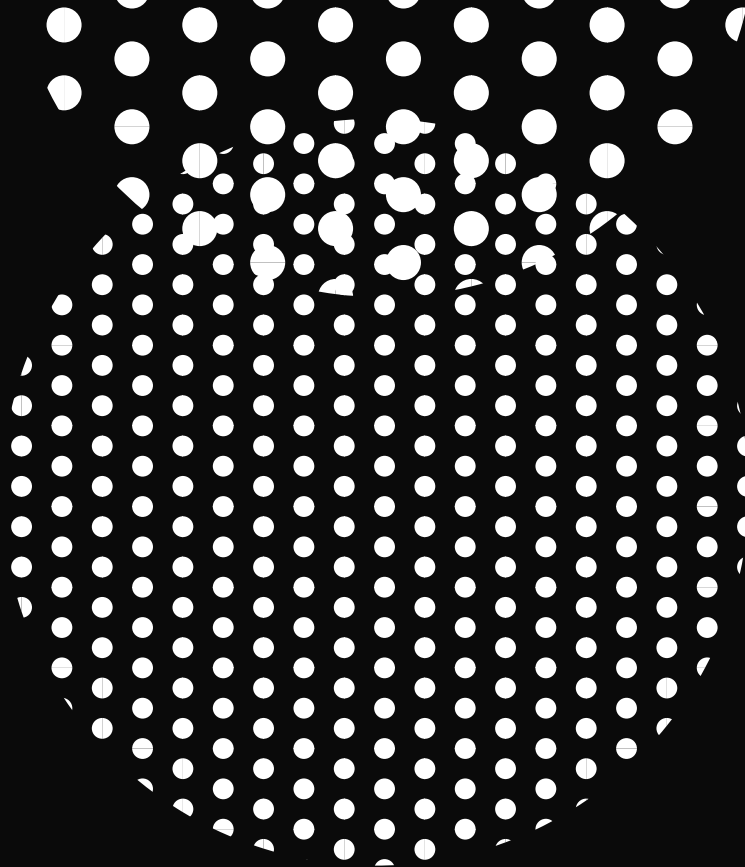




Soient  $X_1, \dots, X_n$  des v.a.s i.i.d tel que  $E[X_i] < +\infty$ .

Notons  $m = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dP_{X_1}$  alors

$\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Soit  $\mu$  une probabilité sur  $\mathbb{R}$  qui admet un moment d'ordre 1.  
posons  $m = \int_{\mathbb{R}} x d\mu(x)$

Alors pour  $n \geq 1$ , soient  $X_1, \dots, X_n$  des v.a.s i.i.d qui se li-  
de  $\mu$ . Alors  $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X$  des v.a.s pas forcément définie sur  
le même espace de probas. On dit que  $X_n$  converge  
vers  $X$  en proba si pour tout  $f$  continue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[f(X_n)] = E[f(X)]$$

Soit  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  l'ensemble des mesures de probas sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$   
alors l'application

$$\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \mapsto \tilde{\Phi}_\mu \quad -$$

est injective.

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des v.a. i.i.d tq  $E[X_i] < +\infty$   
alors

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P.S.} E[X_i]$$

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des v.a. i.i.d qui admet un moment d'ordre 2.  
Notons  $m = E[X_i]$  et  $\sigma^2 = \text{Var}(X_i)$

$$\text{Alors} \quad \frac{X_1 + \dots + X_n - n m}{\sqrt{n}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Soit  $X_1, \dots, X_n, X$  des v.a. on a l'équivalence entre:

1.  $X_n \xrightarrow{d} X$

2.  $\forall u \in \mathbb{R} \quad \Phi_{X_n}(u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi_X(u)$

Soit  $\lambda > 0$  et  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tq  $X_i \sim \text{Bernouilli}(\frac{\lambda}{n})$  sur  $\{0, 1\}$

donc  $N_n = X_1 + \dots + X_n \sim \text{binomiale}(n, \frac{\lambda}{n})$

et  $N_n$  converge vers  $P(\lambda)$  quand  $n \rightarrow \infty$

i.e  $\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(N_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Soient  $Y_1, \dots, Y_n$  des v.a.s qui suivent la loi  $\text{Exp}(\lambda)$  avec  $\lambda > 0$ . Notons  $S_0 = 0$  et

$S_n = Y_1 + \dots + Y_n$  avec  $n \in \mathbb{N}$  alors le processus de poisson de paramètre  $\lambda$  est la fonction aléatoire définie par:

$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad N(t) = \max \{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}$