DM 4

Probabilité

IDD 3 IM

Yehor KOROTENKO

0) Pour $\alpha > 0$. X $\alpha\mathbb{Z}$ distribué veut dire que les valeurs de X sont α espacé, i.e entre chaque valeur de X, l'intervale est α. S'il n'existe pas de tel α, on peut dire que tel espace est 0, i.e les valeurs de X sont 0 espacé ($0\mathbb{Z}$) ce qui équivaut à dire que X prends tous les valeurs dans $\mathbb{R}$. Comme X est une variable aléatoire, i.e à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc $P(X \in \mathbb{R}) = 1$ forcément.

1) a) Notons $f(x) = \inf_n |S_n - x|$

Notons l'ensemble des points récurrents

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon\ P(|S_n - x| < \varepsilon \ \text{i.s}) = 1\}$$

Supposons par l'absurde que R n'est pas fermé.

Donc $\exists$ $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de R tq $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \bar{x} \in \mathbb{R}\setminus R$

i.e $\exists\ \bar{\varepsilon} > 0$ tq $P(|S_n - \bar{x}| < \varepsilon \ \text{i.s}) \neq 1$

Par la loi 0-1 de Kolmogorov

$P(|S_n - \bar{x}| < \varepsilon \quad \text{i.s}) = 0$, d'où $P(|S_n - \bar{x}| \geq \varepsilon \ \text{i.s}) = 1$

D'autre part, $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \bar{x} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall k \geq N\ |x_k - \bar{x}| < \frac{\varepsilon}{2}$

De plus. $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0$, $P(|S_n - x_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i.s}) = 1$

On a $|S_n - \bar{x}| = |S_n - x_k + x_k - \bar{x}| \leq |S_n - x_k| + |x_k - \bar{x}|$

Or $\forall k \in \mathbb{N}$ $|x_k - \bar{x}| \in \mathbb{R}$ alors $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall k \geq N$

$$P(|S_k - x_n| + |x_n - \bar{x}| < \varepsilon \ \text{i.s}) = 1$$

Or $|S_k - \bar{x}| \leq |S_k - x_n| + |x_n - \bar{x}|$ alors

$P(|S_k - \bar{x}| < \varepsilon \quad \text{i.s}) = 1$ ce qui contredit avec l'hypothèse.

Par conséquent, R est fermé.

6) Soit $x \in \mathbb{R}$ possible.

Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$, tq $P(|S_n - x| < \varepsilon) > 0$

Or $\{X_1 \in \alpha\mathbb{Z}, \dots, X_k \in \alpha\mathbb{Z}\} \subseteq \{S_k \in \alpha\mathbb{Z}\}$

Or $P(\{X_1 \in \alpha\mathbb{Z}, \dots, X_k \in \alpha\mathbb{Z}\}) = P(X_1 \in \alpha\mathbb{Z}) \dots P(X_k \in \alpha\mathbb{Z})$
$= 1^k = 1$

et $P(\{X_1 \in \alpha\mathbb{Z}, \dots, X_k \in \alpha\mathbb{Z}\}) \leq P(\{S_k \in \alpha\mathbb{Z}\})$

Alors $P(S_k \in \alpha\mathbb{Z}) = 1$

donc $\alpha\mathbb{Z} \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\neq \emptyset$

Alors on peut trouver une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ en tendant ε vers 0.

Or $\alpha\mathbb{Z}$ est fermé dans $\mathbb{R}$, donc $x \in \alpha\mathbb{Z}$.

2.a)

$S_{n+k} = S_k + (S_{n+k} - S_k)$

$S_{n+k} - x = (S_k - y) + (S_{n+k} - S_k - (x-y))$

$S_{n+k} - S_k$ suit la même loi que S_n, de plus $S_{n+k} - S_k$ et S_k sont indépendantes, alors $\{|S_{n+k} - x| \text{ i.s}\} = \{|S_n - x| \text{ i.s}\}$

$|S_{n+k} - x| \geq |S_{n+k} - S_k - (x-y)| - |S_k - y|$

Soit $\omega \in \{|S_k - y| < \varepsilon\} \cap \{|S_{n+k} - S_k - (x-y)| < 2\varepsilon \text{ i.s}\}$

donc $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \quad |S_{n+k}(\omega) - S_k(\omega) - (x-y)| \geq 2\varepsilon$

donc pour $n \geq N$ $|S_{n+k}(\omega) - x| \geq 2\varepsilon - |S_k(\omega) - y|$
$\geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$ i.e $\omega \in \{|S_{n+k} - x| \text{ i.s}\}$

d'où $\{|S_k - y| < \varepsilon\} \cap \{|S_{n+k} - S_k - (x-y)| < 2\varepsilon \text{ i.s}\} \subset \{|S_{n+k} - x| \text{ i.s}\}$

Il nous reste à montrer que $\{|S_n - x| < \varepsilon \text{ i.s}\} = \{|S_{n+k} - x| < \varepsilon \text{ i.s}\}$
Notons $A_n = |S_n - x| < \varepsilon$ et $A_{n+k} = |S_{n+k} - x| < \varepsilon$

Montrons $\{A_n \text{ i.s}\} \subset \{A_{n+k} \text{ i.s}\}$

Soit $w \in \{A_n \ i.s\}$ alors $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ w \notin A_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$ notons $m = n+k$ si $n \geq N$ donc $w \notin A_m = A_{n+k}$
car $m = n+k \geq N$

donc on trouve $N' = N+k$ $\forall n \geq N'$ $w \notin A_{n+k}$ donc $w \in \{A_{n+k} \ i.s\}$
d'où $\{A_n \ i.s\} \subset \{A_{n+k} \ i.s\}$

Montrons maintenant la réciproque.

Soit $w \in \{A_{n+k} \ i.s\}$ donc $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N$

$w \notin A_{n+k}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, notons $m = n-k$ donc $\forall n \geq N+k$

$m = n-k \geq N+k-k \geq N$ donc $w \notin A_{m+k} = A_{n-k+k} = A_n$

donc on peut trouver $N' = N+k$ tq $\forall n \geq N'$ $w \notin A_n$

d'où $\{A_{n+k} \ i.s\} \subseteq \{A_n \ i.s\}$

Alors on trouve l'égalité $\{A_{n+k} \ i.s\} = \{A_n \ i.s\}$
d'où

$$\{|S_{n+k} - x| < \varepsilon \ i.s\} = \{|S_n - x| < \varepsilon \ i.s\}$$

Par conséquent,

$$\{|S_k - y| < \varepsilon\} \cap \{|S_{n+k} - S_k - (x-y)| < 2\varepsilon \ i.s\}$$
$$\subset \{|S_n - x| < \varepsilon \ i.s\}$$

6)

$$\{|S_n - x| < \varepsilon \ i.s\}^c = \{|S_n - x| < \varepsilon \ i.s\}$$

Soit x récurrent et y possible

Soit $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tq $P(|S_k - y| < \varepsilon) > 0$

donc $\{|S_n - x| < \varepsilon \ i.s\} \subset \left(\{|S_k - y| < \varepsilon\} \cap \{|S_{n+k} - S_k - (x-y)| < 2\varepsilon \ i.s\}\right)^c$

$$= \{|S_k - y| < \varepsilon\}^c \cup \{|(S_{n+k} - S_k) - (x-y)| < 2\varepsilon \ i.s\}$$

Or $S_{n+k} - S_k$ suit la même loi que S_n et $S_{n+k} - S_k$ et S_k sont indépendantes, donc $\{|S_{n+k} - S_k - (x-y)| < 2\varepsilon \ i.s\} = \{|S_n - (x-y)| < 2\varepsilon \ i.s\}$

d'où $P(|S_n - x| < \varepsilon \ i.s) \leq (1 - P(|S_k - y| < \varepsilon)) + P(|S_n - (x-y)| < 2\varepsilon \ i.s)$

$\Rightarrow P(|S_n - x| < \varepsilon \ i.s) - (1 - P(|S_k - y| < \varepsilon)) \leq P(|S_n - (x-y)| < 2\varepsilon \ i.s)$

Or x récurrent donc $P(|S_n - x| < \varepsilon \text{ i.s}) = 1$

alors $P(|S_n - x| < \varepsilon \text{ i.s}) - (1 - P(|S_k - y| < \varepsilon)) > 0$

car $P(|S_k - y| < \varepsilon) > 0$ donc

par la loi de Kolmogorov 0-1

$P(|S_n - (x-y)| < 2\varepsilon \text{ i.s}) = 1$ car

$\{|S_n - (x-y)| < 2\varepsilon \text{ i.s.}\}$ est asymptotique et

$P(|S_n - (x-y)| < 2\varepsilon \text{ i.s}) > 0.$

Donc $x - y$ est récurrent.

3) a) Soit $A \subset \mathbb{R}$ $(A,+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$

si A est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$
ou bien dense dans $\mathbb{R}$

b) Notons R l'ensemble de points récurrents.
Supposons que R n'est pas vide. De plus, d'après 1 a)
R est fermé.

D'abord tout point récurrent est possible.
Pour montrer cela, posons pour $x \in R$, soit $\varepsilon > 0$

posons
$$S = \{w : \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N\ |S_n(w) - x| < \varepsilon\} = \bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{n \geq N} \{w : |S_n(w) - x| < \varepsilon\}$$
$$S = \bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{n \geq N} \{w : |S_n(w) - x| < \varepsilon\}$$
Soit $N \in \mathbb{N}$, on a $S \subset \bigcup_{n \geq N} \{w : |S_n(w) - x| < \varepsilon\}$

Alors
$$1 = P(S) \leq P\Big(\bigcup_{n \geq N} \{w : |S_n(w) - x| < \varepsilon\}\Big) \leq \sum_{n \geq N} P(\{w : |S_n(w) - x| < \varepsilon\})$$
donc $\exists K \in \mathbb{N}$ tq $K \geq N$ et $P(\{w : |S_K(w) - x| < \varepsilon\}) > 0.$

donc x est bien possible.

Maintenant, on peut montrer que R est bien un sous-groupe de $\mathbb{R}$ pour l'addition. Il est clair que $R \subset \mathbb{R}$, donc il nous reste à montrer que R est un groupe pour l'addition.

Soient $x, y \in R$

(i) Or x est récurrent, donc possible, alors d'après 2b $x - x$ est récurrent, d'où $x - x = 0 \in R$

(ii) Comme 0 est récurrent et x possible, donc $0 - x = -x$ est récurrent, i.e $-x \in R$, c'est-à-dire tout élément de R admet une inverse.

(iii) Or y est récurrent, donc $-y$ aussi (d'après (ii)), donc $-y$ est possible, alors
$x - (-y) = x + y$ est récurrent, i.e $x + y \in R$ donc R est stable par addition.

Donc R est bien un sous-groupe de $\mathbb{R}$ pour addition. Or R est de plus fermé, donc R est de la forme $\beta \mathbb{Z}$ pour $\beta \geq 0$.

Donc on a

$$R \text{ non-vide} \Rightarrow R \text{ sous-groupe de } \mathbb{R} \text{ pour l'addition}$$

Alors par contre-apposé, si R n'est pas un groupe, donc R est vide.

c) Soit $G \subset \mathbb{R}$ un sous-groupe fermé pour l'addition qui contient tous les élément possibles. Alors $R \subset G$. Donc $G = \gamma \mathbb{Z}$ pour $\gamma \geq 0$.

De plus tous les états possibles appartiennent à $\alpha \mathbb{Z}$. Alors tout x possible appartient à $\gamma \mathbb{Z}$ mais est de la forme αn avec $n \in \mathbb{Z}$

Soit $a \in \mathbb{R}$ tq $P(X_1 = a) > 0$ Or $S_1 = X_1$
donc $P(|S_1 - a| = 0) > 0$ donc $\forall \varepsilon > 0$, on pose $n = 1$ et on a
$P(|S_n - a| < \varepsilon) > 0$ donc $a \in \mathbb{R}$ est possible.
donc $a \in G$. Donc G contiens tous les éléments tq $P(X_1 = a) > 0$.
Alors $P(X_1 \in G) = 1$ Or G est de la forme $\gamma \mathbb{Z}$, $P(X_1 \in \gamma \mathbb{Z}) = 1$ et $\alpha \mathbb{Z}$ est le plus petit réseau tq $P(X_1 \in \alpha \mathbb{Z}) = 1$ donc $\alpha \mathbb{Z}$ est plus petit ou égal à $\gamma \mathbb{Z} = G$.

Or $\alpha \mathbb{Z}$ est plus petit ou égal à tout sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$ contenant tous les états possibles, donc $\alpha \mathbb{Z}$ est le plus petit sous-groupe de $\mathbb{R}$ contenant tous les états possibles.

4] Supposons que $\exists x \in \mathbb{R}$ tq
$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|S_n - x| < \varepsilon \quad i.s) = 1$

(a) Or x est récurrent, donc possible, d'après
2 b $\quad 0 = x - (x)$ est récurrent, donc 0 est récurrent.

(b) Soit y possible, d'après (a) 0 est recurrent,
d'après 2 b $\quad -y = 0 - (y)$ est récurrent.

(c) D'après (3 b) $\mathcal{R}$ qui est l'ensemble de tous les points récurrent est de la forme $\beta\mathbb{Z}$ avec $\beta \geq 0$. De plus $\alpha\mathbb{Z}$ est le plus petit sous-groupe fermé contenant les points récurrents. Avec $\underset{\beta\mathbb{Z}}{\overset{\mathcal{R}}{\shortparallel}} \subset \alpha\mathbb{Z}$ car les points récurrents sont possibles. Il nous reste à montrer que $\alpha\mathbb{Z} \subset \mathcal{R}$ i.e $\alpha = \beta$.

D'abord montrons que tout point possible est recurrent. D'apres (4 b) si y possible, alors $-y$ est récurrent. Or 0 récurrent est $-y$ recurrent, donc possible, alors d'après 2 b $y = 0 - (-y)$ est récurrent. Donc tout point possible est récurrent.

Supposons par l'absurde que $\alpha\mathbb{Z} \neq \mathcal{R}$.

On sait que $\mathcal{R} \subset \alpha\mathbb{Z}$ donc $\mathcal{R}$ plus petit que $\alpha\mathbb{Z}$. Or tout point possible est recurrent donc $\mathcal{R}$ contient tout point possible. De plus $\mathcal{R}$ est sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$ contenant tous les états possible. Absurde, car d'après 3 c $\alpha\mathbb{Z}$ est le plus petit sous-groupe contenant tous les états possibles. Alors $\mathcal{R} = \alpha\mathbb{Z}$ d'où $\forall x \in \alpha\mathbb{Z}$ x est récurrent.

Partie 2

5] I intervalle bornée de $\mathbb{R}$ tq $Q := I \cap \alpha\mathbb{Z}$ non-vide.

Supposons que $\sum_{n \geq 0} P(S_n \in I) < \infty$, d'après le lemme de Borel-Cantelli:

$P(S_n \in I \quad i.s) = 0$. Or S_n est à valeur dans $\alpha\mathbb{Z}$ donc S_n est discret. Or I est borné et $\alpha\mathbb{Z}$ dénombrable donc

$Q = J \cap \alpha\mathbb{Z}$ est fini. D'où $\{S_n \in J\} = \{S_n \in Q\}$ car S_n à valeurs dans $\alpha\mathbb{Z}$. $P(S_n \in J) = P(S_n \in Q) = \sum_{k=1}^{N} P(S_n = x_k)$ avec $\{x_1, \dots, x_N\} = Q$.

Donc $\sum_{n\geq 0} P(S_n \in J) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=1}^{N} P(S_n = x_k) < +\infty$ par le théorème de Fubini-Tonelli, $\sum_{n\geq 0}\sum_{k=1}^{N} P(S_n = x_k) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n\geq 0} P(S_n = x_k) < +\infty$

Donc $\forall k \in [\![1, N]\!]$

$\sum_{n\geq 0} P(S_n = x_k) < +\infty$ alors $P(S_n = x_k \text{ i.s}) = 0$

Prenons $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$. Donc $|S_n - x_k| < \varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ signifie que $S_n = x_k$. i.e $S_n - x_k = 0$ car S_n discret.

Donc $\{|S_n - x_k| < \varepsilon = \frac{\alpha}{2}\} = \{S_n = x_k\}$

D'où $P(|S_n - x_k| < \frac{\alpha}{2} \text{ i.s}) = P(S_n = x_k \text{ i.s}) = 0$ donc on a trouvé ε tq $P(|S_n - x_k| < \varepsilon \text{ i.s}) \neq 1$.

de plus, l'ensemble de points récurrents R est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$. D'après 4c si R n'est pas vide, alors $R = \alpha\mathbb{Z}$. Or R ne contient pas des éléments de Q, alors $R \neq \alpha\mathbb{Z}$, alors R est vide, i.e aucun point de $\alpha\mathbb{Z}$ est récurrent.

6) Supposons que $\sum_{n\geq 0} P(S_n \in J) = +\infty$.

D'après 5 $\sum_{n\geq 0} P(S_n \in J) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N}}\sum_{n\geq 0} P(S_n = x_k) = +\infty$.

Or la première somme est finie, donc au moins un des termes de la somme est infinie. Donc $\exists k \in [\![1, N]\!]$ tel que

$$\sum_{n\geq 0} P(S_n = x_k) = +\infty$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon < \frac{\lambda(J)}{2}$

On a $\{S_n = x_k\} = \{|S_n - x_k| = 0\} \subset \{|S_n - x_k| < \varepsilon\}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(S_n = x_k) \leq P(|S_n - x_k| < \varepsilon)$ alors

$$+\infty = \sum_{n\geq 0} P(S_n = x_k) \leq \sum_{n\geq 0} P(|S_n - x_k| < \varepsilon)$$

D'où $\sum_{n\geq 0} P(|S_n - x_k| < \varepsilon) = +\infty$

7) Soient x, z tq $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon < \frac{d(Y)}{2}$ et

$$\sum_{n \geq 0} P(|S_n - x| < \varepsilon) = +\infty$$

Pour $k \in \mathbb{N}$

$$A_k = \{ |S_k - x| < \varepsilon, \ \forall n \geq 1, \ |S_{k+n} - x| \geq \varepsilon \}$$

$S_{n+k} - S_k$ suit la même loi que S_k

Soit $\omega \in \{ |S_k - x| < \varepsilon, \ \forall n \geq 1 \ |S_{k+n} - S_k| \geq 2\varepsilon \}$

donc $|S_k(\omega) - x| < \varepsilon$ et $\forall n \geq 1 \ |S_{k+n}(\omega) - S_k(\omega)| \geq 2\varepsilon$

Soit $n \geq 1$

$$S_{k+n} - S_k + x - x = S_{k+n} - S_k = (S_{k+n} - x) - (S_k - x) = (S_{k+n} - x) + (x - S_k)$$

$$|S_{k+n} - S_k| \leq |S_{k+n} - x| + |x - S_k|$$

Donc $|S_{k+n} - x| \geq |S_{k+n} - S_k| - |x - S_k|$

Alors $|S_{k+n}(\omega) - x| \geq |S_{k+n}(\omega) - S_k(\omega)| - |S_k(\omega) - x| \geq \varepsilon$

d'où $|S_k(\omega) - x| < \varepsilon$ et $\forall n \geq 1 \ |S_{k+n}(\omega) - x| \geq \varepsilon$

alors $\varepsilon \in A_k$ d'où

$$\{ |S_k - x| < \varepsilon, \forall n \geq 1 \ |S_{k+n} - S_k| \geq 2\varepsilon \} \subset A_k$$

De plus $S_{n+k} - S_k$ suit la même loi que S_n
et $S_{n+k} - S_k$ et S_k sont indépendantes car $X_1, \dots, X_k$ et $X_{k+1}, \dots, X_{n+k}$ sont indépendantes et i.i.d

alors les événements $\{ |S_k - x| < \varepsilon \}$ et $\{ \forall n \geq 1 \ |S_{k+n} - S_k| \geq 2\varepsilon \}$

sont indépendantes, et de plus $\{ \forall n \geq 1 \ |S_{k+n} - S_k| \geq 2\varepsilon \} = \{ \forall n \geq 1 \ |S_n| \geq 2\varepsilon \}$ car

$S_{k+n} - S_k$ suit la meme lois que S_n d'où, or on a inclusion des événements, on a

$$P(\{ |S_k - x| < \varepsilon, \forall n \geq 1 \ |S_{n+k} - S_k| \geq 2\varepsilon \}) \leq P(A_k)$$

puis $P(\{ |S_k - x < \varepsilon, \forall n \geq \ |S_{n+k} - S_k| \geq 2\varepsilon \}) = P(|S_k - x| < \varepsilon) P(\forall n \geq 1 \ |S_{n+k} - S_k| \geq 2\varepsilon)$
par indépendance des événements et finalements.

$P(\forall n \geq 1 \ |S_{n+k} - S_k| \geq 2\varepsilon) = P(\forall n \geq 1 \ |S_n| \geq 2\varepsilon)$ car suivent la même loi

d'où $P(A_k) \geq P(|S_k - x| < \varepsilon) P(\forall n \geq 1 \ |S_n| \geq 2\varepsilon)$

8)

(a) On a $\sum_{k\geq 0} P(A_k) \geq \sum_{k\geq 0} P(|S_k - x| < \varepsilon)\, P(\forall n \geq 1 \ |S_n| \geq 2\varepsilon)$

$$= P(\forall n\geq 1 \ |S_n| \geq 2\varepsilon) \sum_{k\geq 0} P(|S_k - x| < \varepsilon)$$

$\{|S_n - x| < \varepsilon \ \text{f.s}\} = \{\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \ |S_n - x| \geq \varepsilon\}$

$$= \bigcup_{k\geq 0} A_k$$

Montrons que les A_k sont indépendantes

soit $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ tel que $q \geq p+1$

Soit $\omega \in A_p \cap A_q$ i.e

$|S_p(\omega) - x| < \varepsilon$ et $\forall n \geq 1 \ |S_{p+n}(\omega) - x| \geq \varepsilon$

et $|S_q(\omega) - x| < \varepsilon$ et $\forall n \geq 1 \ |S_{q+n}(\omega) - x| \geq \varepsilon$

Or $q \geq p+1$ donc $\exists n' \geq 1$ tq $q = p+n'$

Donc $|S_q(\omega) - x| \geq \varepsilon$ et $|S_q(\omega) - x| < \varepsilon$

Absurde, donc $A_p \cap A_q$ est vide cela est vrai pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ tq $q \geq p+1$ donc A_k sont indépendantes.

D'où $P(\bigcup_{k\geq 1} A_k) = \sum_{k\geq 1} P(A_k)$

D'où $P(|S_n - x| < \varepsilon \ \text{f.s}) = P(\bigcup_{k\geq 1} A_k) = \sum_{k\geq 1} P(A_k) \geq P(\forall n\geq 1 \ |S_n| \geq 2\varepsilon) \sum_{k\geq 0} P(|S_k - x| < \varepsilon)$

b) D'après 6) $\sum_{k\geq 0} P(|S_k - x| < \varepsilon) = +\infty$ d'autre part

$0 \leq P(|S_n - x| < \varepsilon \ \text{f.s}) \leq 1$, donc pour que cela soit vrai,

$P(\forall n\geq 1 \ |S_n| \geq 2\varepsilon) = 0$ forcément. Si $P(\forall n \geq 1 \ |S_n| \geq 2\varepsilon) > 0$

on aurait $P(|S_n - x| < \varepsilon \ \text{f.s}) = +\infty$.

a) Soient δ, ε tq $0 < \delta < \varepsilon$ et $k \in \mathbb{N}$

$$S_{k+n} = S_k + S_{k+n} - S_k$$

$|S_{k+n}| \leq |S_k| + |S_{k+n} - S_k|$, alors $|S_{k+n} - S_k| \geq |S_{k+n}| - |S_k|$

Soit $\omega \in \{|S_k| < \delta, \forall n \geq 1 \ |S_{k+n}| \geq \varepsilon\}$

donc $|S_k(\omega)| < \delta$ et $\forall n \geq 1 \ |S_{k+n}(\omega)| \geq \varepsilon$

alors $-|S_k(\omega)| > -\delta$. En sommant les inégalités, on obtient

$\forall n \geq 1 \ |S_{k+n}(\omega) - S_k(\omega)| \geq |S_{k+n}(\omega)| - |S_k(\omega)| \geq \varepsilon - \delta$

d'où $|S_k(\omega)| < \delta$ et $\forall n \geq 1 \ |S_{k+n}(\omega) - S_k(\omega)| \geq \varepsilon - \delta$

d'où $\omega \in \{|S_k| < \delta, \forall n \geq 1 \ |S_{k+n} - S_k| \geq \varepsilon - \delta\}$

Alors $\{|S_k| < \delta, \forall n \geq 1 \ |S_{k+n}| \geq \varepsilon\} \subset \{|S_k| < \delta, \forall n \geq 1 \ |S_{k+n} - S_k| \geq \varepsilon - \delta\}$

b) On a $P(\{|S_k| < \delta, \forall n \geq 1 \ |S_{k+n}| \geq \varepsilon\}) \leq P(\{|S_k| < \delta, \forall n \geq 1 \ |S_{k+n} - S_k| \geq \varepsilon - \delta\})$
car l'inclusion.

De plus $S_{k+n} - S_k$ suit la même loi que S_n et
S_k et $S_{k+n} - S_k$ sont indépendantes car $X_1 + \dots + X_k$ et $X_{k+1} + \dots + X_{k+n}$
sont indépendantes, d'où

$$P(\{|S_k| < \delta, \forall n \geq 1 \ |S_{k+n} - S_k| \geq \varepsilon - \delta\}) = P(|S_k| < \delta) P(\forall n \geq \ |S_n| \geq \varepsilon - \delta)$$

D'où $\sum_{k \geq 0} P(\{|S_k| < \delta, \forall n \geq 1 \ |S_{k+n}| \geq \varepsilon\}) \leq \sum_{k \geq 0} P(|S_k| < \delta) P(\forall n \geq \ |S_n| \geq \varepsilon - \delta)$

$$= P(\forall n \geq 1 \ |S_n| \geq \varepsilon - \delta) \sum_{k \geq 0} P(|S_k| < \delta)$$

D'après 8 b $\forall \eta > 0 \ P(\forall n \geq 1 \ |S_n| \geq 2\eta) = 0$

donc en posant $\eta = \frac{\varepsilon - \delta}{2}$ alors $P(\forall n \geq 1 \ |S_n| \geq \varepsilon - \delta) = 0$

Donc $\sum_{k \geq 0} P(\{|S_k| < \delta, \forall n \geq 1 \ |S_{k+n}| \geq \varepsilon\}) = 0$, Or probabilité est
toujour non-négative est la somme vaut 0, donc

$\forall k \in \mathbb{N}, P(\{|S_k| < \delta, \forall n \geq 1 \ |S_{k+n}| \geq \varepsilon\}) = 0$

c) En suivant le même raisonnement, on obtient

$P(\{|S_k|<\varepsilon,\ \forall n\geq 1\ |S_{k+n}-S_k|\geq \varepsilon-\delta\}) = P(|S_k|<\varepsilon)P(\forall n\geq\ |S_n|\geq \varepsilon-\delta)$

D'où $\sum_{k\geq 0} P(\{|S_k|<\varepsilon,\ \forall n\geq 1\ \ |S_{k+n}|\geq\varepsilon\}) \leq \sum_{k\geq 0} P(|S_k|<\varepsilon)P(\forall n\geq\ |S_n|\geq \varepsilon-\delta)$

$$= P(\forall n\geq 1\ |S_n|\geq \varepsilon-\delta)\sum_{k\geq 0} P(|S_k|<\varepsilon)$$

Et encore d'après 8 b

$$\sum_{k\geq 0} P(\{|S_k|<\varepsilon,\ \forall n\geq 1\ \ |S_{k+n}|\geq\varepsilon\}) = 0 \quad \text{d'où}$$

$$P(\{|S_k|<\varepsilon,\ \forall n\geq 1\ \ |S_{k+n}|\geq\varepsilon\}) = 0$$

d) Soit $\varepsilon>0$

$$A = \{|S_n|<\varepsilon \ \text{i.s}\} = \bigcup_{k\geq 0} \{|S_k|<\varepsilon,\quad \forall n\geq 1\ |S_{n+k}|\geq\varepsilon\}$$

d'où $P(A) = P(\bigcup_{k\geq 0} \{|S_k|<\varepsilon, \forall n\geq 1\ |S_{n+k}|\geq\varepsilon\}) \leq \sum_{k\geq 0} P(\{|S_k|<\varepsilon, \forall n\geq 1\ |S_{n+k}|\geq\varepsilon\})$

d'après 9 c) $= \sum_{k\geq 0} 0 \quad = 0$

Alors $\forall\varepsilon>0$,

$$P(|S_n|<\varepsilon \ \text{i.s}) = 0$$

10) D'après 9 d) $\forall\varepsilon>0 \quad P(|S_n|<\varepsilon \ \text{i.s}) = 0$, donc

$\forall\varepsilon>0 \quad P(|S_n-0|<\varepsilon \ \text{i.s}) = 1$ ce qui veut dire que

0 est récurrent.

Théorème:

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires réelles distribuées sur le réseau $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha\geq 0$. On note $\forall n\in\mathbb{N}$ $S_n = X_1+\dots+X_n$ une marche aléatoire associée. Soit J un intervalle borné de $\mathbb{R}$ tq $J\cap\alpha\mathbb{Z}\neq\emptyset$ alors :

(i) Si $\sum_{k\geq 0} P(S_k\in J) < +\infty$ alors aucun point de S_n n'est récurrent

(ii) Si $\sum_{k\geq 0} P(S_k\in J) = +\infty$ alors 0 est un point récurrent

et donc tous les points de $\alpha\mathbb{Z}$ sont récurrents.

Partie 3

11) Supposons que $E[X_1] > 0$

Si $E[X_1] < +\infty$

D'après la loi forte des grands nombres

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{X_1+\dots+X_n}{n} = E[X_1] \text{ , d'où}$$

$$\lim_{n\to+\infty} X_1+\dots+X_n = \lim_{n\to+\infty} n\,E[X_1] = +\infty$$

Si $E[X_1] = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} X_1+\dots+X_n = +\infty$ évidemment.

12) Supposons que $E[X_1] \neq 0$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \pm\infty$

Donc $\forall \ell \in \mathbb{R}^+ \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |S_n| \geq \ell$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\ell > 0$ tq $\exists N,\ \forall n \geq N.\ |S_n| > \ell$

posons $\varepsilon = \ell + |x|$

$P(\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N \quad |S_n - x| \geq |S_n| + |x| > \varepsilon) = 1$

$= P(|S_n - x| < \varepsilon \quad f.s \quad)$ alors $P(|S_n - x| < \varepsilon \ \ i.s) = 1 - P(|S_n - x| < \varepsilon \ f.s)$
$= 0$

Alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad$ tq

$$P(|S_n - x| < \varepsilon \quad i.s) = 0$$

Donc aucun point n'est récurrent.

13)
a) $N = \sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{1}_J(S_n)$

Notons $Y_n = \mathbb{1}_J(S_n)$. $\forall n \in \mathbb{N}$, Y_n est à valeurs dans $\{0,1\}$

Donc $Y_n^{-1}(1) = \{w : S_n(w) \in J\}$ -mesurable car S_n mesurable
$= \{S_n \in J\}$

$Y_n^{-1}(0) = \{S_n \notin J\}$ encore mesurable.

Donc Y_n est une variable aléatoire.

$N_m = \sum_{n=0}^{m} Y_n$ est une somme finie des variables aléatoires, d'où N_m est une variable aléatoire $\forall m \in \mathbb{N}$.

$\forall w \in \Omega$, $(N_m(w))_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.

Donc $\forall w \in \Omega$

$N(w) = \lim_{m \to +\infty} N_m(w)$ limite simple d'une suite croissante les fonctions mesurable, d'où

N est mesurable, donc variable aléatoire.

$T = \inf\{n \geq 1 : S_n \in J\}$

Soit $a \in \mathbb{R}$

$T^{-1}(]-\infty, a]) = \{ w : \exists N \in \mathbb{N}, N \leq a, S_N \in J\}$

$= \bigcup_{n \geq 1}^{\lfloor a \rfloor} \{S_n \in J\}$ donc mesurable car l'union dénombrable des mesurable donc

T est une variable aléatoire.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{1}_J(S_n) \in \{0,1\}$

Or $N = \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_J(S_n)$ est une somme infinie

N est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

$\forall n \geq 1$ $T \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ comme si $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $S_n \notin J$, $\inf \emptyset = +\infty$

c) N represente le nombre de S_n dont la valeur appartient à J.

T représente le plus petit n pour lequel S_n appartient à J.

14)

$$E[N] = \sum_{q=0}^{+\infty} q\, P(\{N=q\}) = \sum_{q=1}^{+\infty} (q-1)\, P(\{N=q-1\})$$

Soit $q \in \mathbb{N}^*$

soit $w \in \{N=q\}$, donc $\exists\, x_1,\dots,x_q$ tq $S_{x_1} \in J, \dots, S_{x_q} \in J$

donc en prennant $x = \inf\{\tilde{x} \geq 1 : \tilde{x} \in \{x_1,\dots,x_q\}\}$

On a $w \in \{T = x\}$

pour $w \in \{N = +\infty\}$, il existe un ensemble dénombrable $(x_i)_{i=1}^{+\infty}$ tq $\forall i \in \mathbb{N}^*$ $S_{x_i} \in J$, donc de même il existe $x = \inf\{\tilde{x} \geq 1 : \tilde{x} \in \bigcup_{i=1}^{+\infty}\{x_i\}\}$ et donc

$w \in \{T = x\}$

d'où $N^{-1}(\mathbb{R}) \subset T^{-1}(\mathbb{R})$

Soit $q \in \mathbb{N}^*$

soit $w \in \{T=q\}$ i.e $S_q(w) \in J$ d'où $w \in \{N \geq 1\}$

car $N(w) = \sum_{n=0}^{q-1} \mathbb{1}_J(S_n(w)) + \underbrace{\mathbb{1}_J(S_q(w))}_{=1} + \sum_{n=q+1}^{+\infty} \mathbb{1}_J(S_n(w)) \geq 1$

soit $w \in \{T = +\infty\}$ donc il y a deux cas possibles:

1) $\underset{\underset{0}{\shortparallel}}{S_0(w)} \in J$ et $\forall n \geq 1$ $S_n(w) \notin J$ donc $N(w) = \underbrace{\mathbb{1}_J(S_0(w))}_{=1} + \underbrace{\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_J(S_n(w))}_{=0}$

$= 1$

i.e $w \in \{N = 1\}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_n(w) \notin J$ et donc $N(w) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_J(S_n(w)) = 0$

donc $w \in \{N=0\}$

Alors $\forall w \in T^{-1}(\mathbb{R})$ $w \in N^{-1}(\mathbb{R})$

Par conséquent $T^{-1}(\mathbb{R}) = N^{-1}(\mathbb{R})$

Il nous reste à montrer que $(\{T=k\})_{k=1}^{+\infty}$ partitionne $N^{-1}(\mathbb{R})$

alors, il suffit de montrer que $\forall k,k' \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ avec $k \neq k'$

$\{T=k\} \cap \{T=k'\} = \emptyset$ i.e, $\{T=k\}$ sont disjoints.

Soit $k,k' \in \mathbb{N}^*$ avec $k < k'$

soit $w \in \{T=k'\}$, donc par définition de T

$S_{k'}(w) \in J$ et $S_k(w) \notin J$ car $k < k'$

donc $w \notin \{T=k\}$

Alors $\forall w \in \{T=k'\}$, $w \notin \{T=k\}$

donc $\{T=k\} \cap \{T=k'\} = \emptyset$ $\forall k < k' \in \mathbb{N}^*$

Soit $w \in \{T=+\infty\}$ alors $\forall q \in \mathbb{N}^*$

$S_q(w) \notin J$ donc il n'existe pas de $k \in \mathbb{N}^*$
tq $k = \inf\{n \geq 1 : S_n(w) \in J\}$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $w \notin \{T=k\}$

donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\{T=+\infty\} \cap \{T=k\} = \emptyset$

Alors $(\{T=k\})_{k=1}^{+\infty}$ partitionne bien $N^{-1}(\mathbb{R})$

D'où $E[N] = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\{T=k\}} N \, dP$

15- Soit $k \geq 1$. On a $\{T=k\} = \{S_k \in J\} \cap \bigcap_{j=1}^{k-1} \{S_j \notin J\}$

Or $\forall j \in [\![1,k]\!]$ $S_j = X_1 + \dots + X_j$ est une somme partielle des $X_1, \dots, X_j$ et J est un Borélien, donc J^c aussi, alors

$\forall j \in [\![1,k]\!]$

$\{S_j \in J\} \in \sigma(X_1, \dots, X_j) \subset \sigma(X_1, \dots, X_k)$

et

$\{S_j \notin J\} = \{S_j \in J^c\} \in \sigma(X_1, \dots, X_j) \subset \sigma(X_1, \dots, X_k)$

car $j \leq k$. Or $\{S_k \in J\} \in \sigma(X_1, \dots, X_k)$

et $\forall j \in [\![1,k-1]\!]$ $\{S_j \notin J\} \in \sigma(X_1, \dots, X_k)$

et $\sigma(X_1, \dots, X_k)$ est une tribu donc leurs intersection qui est $\{T=k\}$ est encore de la tribu $\sigma(X_1, \dots, X_k)$.

16) a) Soit $k \geq 1$ et soit $\omega \in \{T = k\}$ i.e $k = \inf\{n \geq 1 : S_n(\omega) \in J\}$

i.e $S_k(\omega) \in J$ et $\forall j \in [\![1, k-1]\!]$ $S_j(\omega) \notin J$

alors $\mathbb{1}_J(S_k(\omega)) = 1$ et $\forall j \in [\![1, k-1]\!]$ $\mathbb{1}_J(S_j(\omega)) = 0$

b) $$N(\omega) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_J(S_n(\omega)) = \underbrace{\sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{1}_J(S_n(\omega))}_{=0} + \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{1}_J(S_n(\omega))$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{1}_J(S_n(\omega))$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_J(S_{n+k}(\omega))$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_J(S_{n+k}(\omega))$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{J - S_k(\omega)}(S_{n+k}(\omega) - S_k(\omega))$$

Or $S_k(\omega) \in J$ donc $J - S_k(\omega)$ contient 0.

de plus $J - S_k(\omega)$ de longueur a et comme $J - S_k(\omega)$ contient 0, donc $\forall x \in J - S_k(\omega)$ $x \leq a$ et $x \geq -a$.

Donc $J - S_k(\omega) \subset [-a, a]$ d'où $\mathbb{1}_{J - S_k(\omega)} \leq \mathbb{1}_{[-a,a]}$

D'où $$N(\omega) \leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{J - S_k(\omega)}(S_{n+k}(\omega) - S_k(\omega))$$
$$\leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-a,a]}(S_{n+k}(\omega) - S_k(\omega))$$

c) D'après b, on a

$$N \leq 1 + \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{[-a,a]}(S_{n+k} - S_k)$$ avec $S_{n+k} - S_k$ suivant la même loi que S_n, d'où

$$N \leq 1 + \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{[-a,a]}(S_n)$$

$$\int_{\{T=k\}} N(\omega) P(\omega) d\omega$$

$$= \int_\Omega N(\omega) \mathbb{1}_{\{T=k\}}(\omega) P(\omega) d\omega \leq \int_\Omega \left(1 + \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{[-a,a]}(S_n(\omega))\right) \mathbb{1}_{\{T=k\}}(\omega) P(\omega)\, d\omega$$
$$= \int_\Omega \mathbb{1}_{\{T=k\}}(\omega) P(\omega) + \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{[-a,a]}(S_n(\omega)) \mathbb{1}_{\{T=k\}}(\omega) P(\omega)\, d\omega$$

$$= \int_\Omega \mathbb{1}_{\{T=k\}} P(\omega)d\omega + \int_\Omega \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{[-a,a]}(S_n(\omega))\mathbb{1}_{\{T=k\}}(\omega)P(\omega)d\omega$$

$$= P(\{T=k\}) + \int_\Omega \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{[-a,a]}(S_n(\omega))\mathbb{1}_{\{T=k\}}(\omega)P(\omega)d\omega$$

$$= P(\{T=k\}) + \sum_{n\geq 1} \int_\Omega \mathbb{1}_{[-a,a]}(S_n(\omega))\mathbb{1}_{\{T=k\}}(\omega)P(\omega)d\omega$$

$$= P(\{T=k\}) + \sum_{n\geq 1} P(\{|S_n|\leq a\} \cap \{T=k\})$$

$$= P(\{T=k\}) + \sum_{n\geq 1} P(\{|S_n|\leq a\})P(\{T=k\})$$

$$= P(T=k)\left(1 + \sum_{n\geq 1} P(|S_n|\leq a)\right)$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$

$\{|S_n|\leq a\} = \{|S_{n+k}-S_k|\leq a\}$
et $S_{n+k}-S_k$ est indépendant de S_k

de plus $\{|S_{n+k}-S_k|\leq a\}$ est dans la tribu $\sigma(X_{k+1},\dots,X_{n+k})$.
D'après 15, $\{T=k\}$ est dans la tribu $\sigma(X_1,\dots,X_k)$
Ces tribus sont indépendantes, car $X_1,\dots,X_k$ et $X_{k+1},\dots,X_{n+k}$ sont indépendantes.
Alors les événements sont indépendantes.

<u>16</u> D'après 14 $E[N] = \sum_{k\geq 1} \int_{\{T=k\}} N\,dP$

$$\leq \sum_{k\geq 1} P(T=k)\left(1+\sum_{n\geq 1} P(|S_n|\leq a)\right)$$

$$= \left(1+\sum_{n\geq 1}P(|S_n|\leq a)\right)\cdot \sum_{k\geq 1} P(T=k)$$ car $\{T=k\}$ sont disjoints.

$$= P(T<+\infty)\left(1+\sum_{n\geq 1}P(|S_n|\leq a)\right)$$

<u>17</u> Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$$\{|S_n|<M\} = \{S_n\in[-M,-M+1[\}\cup\{S_n\in[-M+1,-M+2[\}\cup\dots\cup\{S_n\in[M-1,M[\}$$

donc $P(|S_n|<M) \leq \sum_{k=-M}^{M-1} P(k\leq S_n<k+1)$

d'où $$\sum_{n\geq 1} P(|S_n|<M) \leq \sum_{n\geq 1}\sum_{k=-M}^{M-1} P(k\leq S_n<k+1)$$

$$= \sum_{k=-M}^{M-1}\sum_{n\geq 1} P(k\leq S_n<k+1)$$

$$= \sum_{k=-M}^{M-1}\sum_{n\geq 1} P(S_n\in[k,k+1[)$$

Si $I=[k,k+1[$ donc $a=1$

$$= \sum_{k=-M}^{M-1}\sum_{n\geq 1}\int_\Omega \mathbb{1}_{[k,k+1[}(S_n(\omega))P(\omega)\,d\omega$$

$$\leq \sum_{k=-M}^{M-1}\sum_{n\geq 1}\int_{\{T=n\}} \mathbb{1}_{\{S_n\in[k,k+1[\}}(\omega)P(\omega)d\omega$$

$$= \sum_{k=-M}^{M-1} \int_{\Omega} \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n \in [k,k+1[\}}(\omega) P(\omega)\, d\omega$$
$$\leq \sum_{k=-M}^{M-1} \int_{\Omega} N \, dP$$
$$= \sum_{k=-M}^{M-1} \sum_{q=1}^{+\infty} \int_{\{T=q\}} N\, dP \quad \text{car } \{T=q\} \text{ partitionnent } \Omega$$
$$= \sum_{k=-M}^{M-1} E[N]$$
$$\leq \sum_{k=-M}^{M-1} P(T<+\infty)\left(1+\sum_{n\geq 1} P(|S_n|\leq 1)\right)$$
$$\leq \sum_{k=-M}^{M-1} \left(1+\sum_{n\geq 1} P(|S_n|\leq 1)\right)$$
$$\leq 2M\left(1+\sum_{n\geq 1} P(|S_n|\leq 1)\right)$$

18) Soit $\varepsilon>0$.

a) $P(|S_n| \leq \lfloor n\varepsilon \rfloor) = P\left(\frac{|S_n|}{n} \leq \frac{\lfloor n\varepsilon\rfloor}{n}\right)$

D'après la loi faible des grands nombres

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{|S_n|}{n} \leq \frac{\lfloor n\varepsilon\rfloor}{n}\right) = 1$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} P(|S_n| \leq \lfloor n\varepsilon\rfloor) = 1$.

b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$

pour $1\leq n\leq \frac{m}{\sqrt{\varepsilon}}$ $\quad \lfloor n\varepsilon\rfloor \leq \lfloor m\sqrt{\varepsilon}\rfloor$

Alors $\{|S_n| < \lfloor n\varepsilon\rfloor\} \subset \{|S_n| < \lfloor m\sqrt{\varepsilon}\rfloor\}$

$\forall n \in [\![1, \frac{m}{\sqrt{\varepsilon}}]\!] \quad P(|S_n|<\lfloor n\varepsilon\rfloor) \leq P(|S_n|<\lfloor m\sqrt{\varepsilon}\rfloor)$

d'où $$\sum_{1\leq n\leq \frac{m}{\sqrt{\varepsilon}}} P(|S_n|<\lfloor n\varepsilon\rfloor) \leq \sum_{1\leq n\leq \frac{m}{\sqrt{\varepsilon}}} P(|S_n|<\lfloor m\sqrt{\varepsilon}\rfloor) \leq \sum_{n\geq 1} P(|S_n|<\lfloor m\sqrt{\varepsilon}\rfloor)$$

c) D'après 18 a) $\quad P(|S_n|\leq \lfloor n\varepsilon\rfloor) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

i.e $\forall \delta>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n\geq N \quad P(|S_n|\leq\lfloor n\varepsilon\rfloor)\geq 1-\delta$

Soit $\delta>0$ on trouve N tq $\forall n\geq N$ $P(|S_n|\leq \lfloor n\varepsilon\rfloor)\geq 1-\delta$

pour m grand tel que $\lfloor \frac{m}{\sqrt{\varepsilon}}\rfloor \geq N$

on a
$$\sum_{1\leq n\leq \frac{m}{\sqrt{\varepsilon}}} P(|S_n|<\lfloor n\varepsilon\rfloor) \geq \left(\lfloor \tfrac{m}{\sqrt{\varepsilon}}\rfloor - (N-1)\right)(1-\delta)$$

donc $$\frac{1}{m\sqrt{\varepsilon}} \sum_{n\geq 1} P(|S_n|<\lfloor n\varepsilon\rfloor) \geq \left(\frac{\lfloor\frac{m}{\sqrt{\varepsilon}}\rfloor}{m\sqrt{\varepsilon}} - \frac{N-1}{m\sqrt{\varepsilon}}\right)(1-\delta)$$

Il est clair que $\frac{\lfloor\frac{m}{\sqrt{\varepsilon}}\rfloor}{m\sqrt{\varepsilon}} \xrightarrow[m\to+\infty]{} \frac{1}{\varepsilon}$

et $\frac{N-1}{m\sqrt{\varepsilon}} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$ comme N est fixé

Donc $\liminf_{m \to +\infty} \frac{1}{m\sqrt{\varepsilon}} \sum_{n \geq 1} P(|S_n| < \lfloor m\sqrt{\varepsilon} \rfloor)$

$\geq \liminf_{m \to +\infty} \frac{1}{m\sqrt{\varepsilon}} \sum_{1 \leq n \leq \frac{m}{\sqrt{\varepsilon}}} P(|S_n| \leq \lfloor n\varepsilon \rfloor)$

$\geq \liminf_{m \to +\infty} \left(\frac{\lfloor \frac{m}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor}{m\sqrt{\varepsilon}} - \frac{N-1}{m\sqrt{\varepsilon}} \right)(1-\delta) = (1-\delta)\frac{1}{\varepsilon} \xrightarrow[\delta \to 0]{} \frac{1}{\varepsilon}$

19) D'après 17

$$\sum_{n \geq 1} P(|S_n| \leq 1) \geq \left(\frac{1}{2M} \sum_{n \geq 1} P(|S_n| < M \right) - 1 \qquad \forall M \geq 1$$

Soit $\varepsilon > 0$ posont $M = \frac{1}{2} m\sqrt{\varepsilon}$ pour m grand tel que $\frac{1}{2} m\sqrt{\varepsilon} \geq 1$

On a

$$\sum_{n \geq 1} P(|S_n| \leq 1) \geq \left(\frac{1}{2M} \sum_{n \geq 1} P(|S_n| < M \right) - 1$$

$\geq \liminf_{m \to +\infty} \frac{1}{m\sqrt{\varepsilon}} \sum_{n \geq 1} P(|S_n| < m\sqrt{\varepsilon}) - 1$ car $\{|S_n| < \lfloor m\sqrt{\varepsilon} \rfloor\} \subset \{|S_n| < m\sqrt{\varepsilon}\}$

$\geq \liminf_{m \to +\infty} \frac{1}{m\sqrt{\varepsilon}} \sum_{n \geq 1} P(|S_n| < \lfloor m\sqrt{\varepsilon} \rfloor) - 1$

$\geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$ d'après 18 c)

$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} +\infty$

D'où $\sum_{n \geq 1} P(|S_n| \leq 1) = +\infty$

Nous avons montrer que si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des variable aléatoires intégrables i.i.d avec $E[X_i] = 0$, alors 0 est un point récurrent.