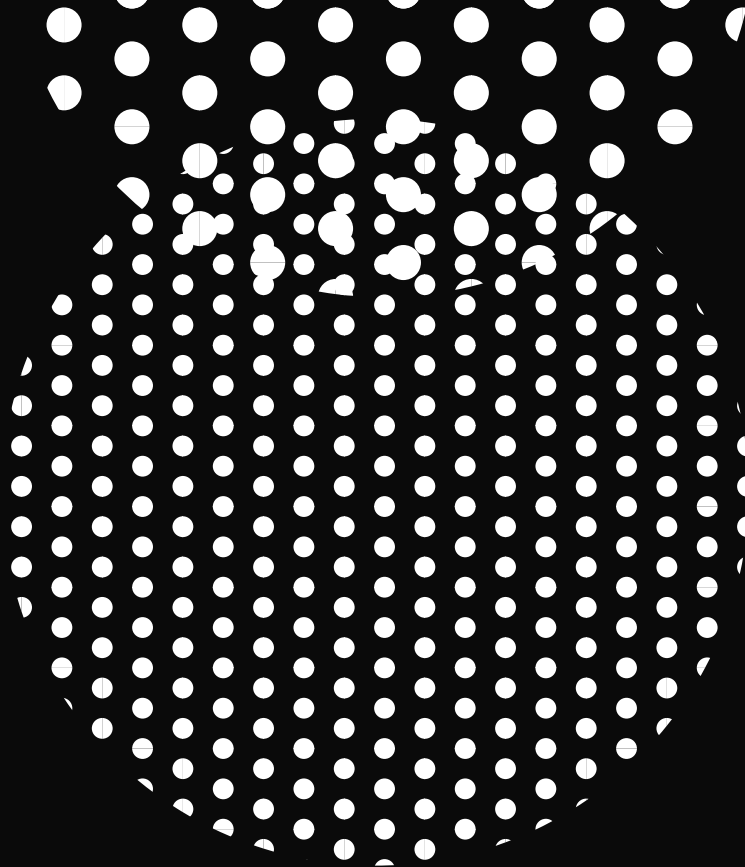




Problème 2

partie 1

1) la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

2) On écrit la définition de la convergence

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N \quad P(|X_n - X| > \varepsilon) < \varepsilon'$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$

pour ε on prend $\varepsilon = \frac{1}{m}$. Par la convergence
donc $\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad P(|X_n - X| > \frac{1}{m}) < \varepsilon'$

Alors en prenant $\varepsilon' = \frac{1}{m^2}$ on obtient

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \quad P(|X_n - X| > \frac{1}{m}) < \frac{1}{m^2}$$

3) D'après 2 $\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists N(m) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N(m) \quad P(|X_n - X| > \frac{1}{n}) < \frac{1}{n^2}$

donc il suffit de prendre $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto N(m) + n$

Pour avoir φ qui marche pour tout m
on prend $N^+ = \max_{m \in \mathbb{N}} \{ \varphi_m(0) \}$

et on pose $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto N^+ + n$

Donc $\forall m \in \mathbb{N} \quad \varphi(m) \geq N(m) \quad \text{donc} \quad P(|X_{\varphi(m)} - X| > \frac{1}{m}) < \frac{1}{m^2}$

4)

$$m \in \mathbb{N}$$

$$A_m = \{ |X_{\varphi(m)} - X| > \frac{1}{m} \}$$

$$\text{On a } \forall m \in \mathbb{N} \quad P(A_m) < \frac{1}{m^2}$$

$$\text{donc } P\left(\bigcup_{m=1}^{+\infty} A_m\right) \leq \sum_{m=1}^{+\infty} P(A_m) \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} < +\infty$$

Donc d'après le lemme de Borel-Cantelli

$$P(A_m \text{ arrive infiniment de fois}) = 0 \text{ d'où}$$

$$P(A_m \text{ arrive un nombre fini de fois}) = 1$$

5)

$$A_m = \{ \omega \in \Omega : |X_n - X| > \frac{1}{m} \}$$

$$P(A_m) \longrightarrow 0$$

$$A_m^c = \{ \omega \in \Omega : |X_n - X| \leq \frac{1}{m} \}$$

$$P(A_m^c) = 1 - P(A_m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} A_m^c = \{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \}$$

$$\text{D'où } P(A_m^c \text{ arrive infiniment de fois}) = 1 \\ = P(\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \}) = 1$$

6)

En combinant 1, 2, 3, 4, 5 on trouve qu'une suite

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge en probabilité vers X

admet une application ϕ en utilisant laquelle on construit une sous-suite $(X_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge presque sûrement vers X .

Par conséquent

$$\forall (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \exists \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad P(\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow +\infty} X_{\phi(n)}(\omega) = X(\omega) \}) = 1$$

8) On suppose que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers X en probabilité.

$$\text{i.e. } \forall \varepsilon > 0 \quad P(|X_n - X| > \varepsilon) \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{d'où } \exists \varepsilon > 0 \quad \exists \varepsilon' > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N \quad P(|X_n - X| > \varepsilon) \geq \varepsilon' > 0$$

En posant $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $N \mapsto n+N$

on obtient ce qu'il fallait démontrer.

8) Pour toute sous suite $(X_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ pour simplicité
 notons $v(n) = \phi(n)$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(|X_{v(n)} - X| > \varepsilon) \geq \delta > 0$$

$$P(\{\omega \in \Omega: \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\}) \neq 1 \text{ d'où la}$$

conclusion.

9) On a démontré que toute suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge
 vers X en probabilité si et seulement si
 une sous suite extraite $(X_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge
 presque sûrement vers X .

Problème 2

1)

$$a) \quad P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}$$

$$b) \quad \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

$$c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(S_{2n} = 0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

d'après le lemme de Borel-Cantelli:

$$P(S_{2n} \text{ arrive une infinité de fois}) = 1$$

2) $k \in \mathbb{Z}$

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$$

$$P(S_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } n-k \text{ n'est pas pair} \\ \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \binom{n-k}{\frac{n-k}{2}} \frac{1}{2^{\frac{n-k}{2}}} \sim \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{n-k}{2}}} \end{cases}$$

$$a) \quad \begin{cases} u+v=n \\ u-v=k \end{cases} \Rightarrow \quad u = \frac{n+k}{2} \quad v = \frac{n-k}{2}$$

$$P(S_n = k) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} & \text{si } n \equiv k \pmod{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$b) \quad P(S_n = k) \sim \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2^n} \frac{2^n}{\sqrt{\frac{\pi}{2}n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}n}} = 0$$

$$c) \quad P(|S_n| \leq k) = P(-k \leq S_n \leq k) \leq \sum_{i=-k}^k P(S_n = i)$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|S_n| \leq k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=-k}^k P(S_n = i) = 0 \quad \text{car une somme finie.}$$

3) D'après ce qui précède, $P(|S_n| \leq k)$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Donc d'après la définition de la convergence

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad P(|S_n| \leq k) \leq \varepsilon$$

$$\text{Donc } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad P(|S_n| \leq k) \leq \varepsilon$$

alors, soit $\varepsilon > 0$ donc on obtient $N \in \mathbb{N}$ qui convient, alors on introduit une application $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $k \mapsto N+k$

$$\text{d'où } \forall k \in \mathbb{N} \quad f(k) \geq N \quad \text{d'où}$$

$$P(|S_{f(k)}| \leq k) \leq \varepsilon$$

$$4) \quad \phi(1) < \psi(1) < \phi(2) < \psi(2) < \dots < \phi(n) < \psi(n) < \dots$$

$$A_n = \{X_{\phi(n)+1} + \dots + X_{\psi(n)} \leq -\phi(n)\} \cap \{X_{\psi(n)+1} + \dots + X_{\phi(n+1)} \geq \psi(n)\}$$

$$A_{n+1} = \{X_{\phi(n+1)+1} + \dots + X_{\psi(n+1)} \leq -\phi(n+1)\} \cap \{X_{\psi(n+1)+1} + \dots + X_{\phi(n+2)} \geq \psi(n+1)\}$$

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tq $m \geq n+1$ i.e $n < m$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \phi(n) + 1 \leq \psi(n) \leq \psi(n+1) \leq \phi(n+1)$$

$$\text{donc } \phi(n) + 1 \leq \psi(n) \leq \psi(n+1) \leq \phi(n+1) \leq \phi(m) < \phi(m+1)$$

D'où $X_{\phi(n)+1}, \dots, X_{\psi(n)}$ sont indépendantes
de $X_{\phi(m)+1}, \dots, X_{\phi(m+1)}$

d'où les événements A_n et A_m sont indépendants.

Où tous les sous ensembles de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$
sont indépendants, donc $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est indépendant.

5] Supposons que l'événement A_n arrive, alors

$$X_{\phi(n)+1} + \dots + X_{\psi(n)} \leq -\phi(n) \quad \text{et} \quad X_{\psi(n)+1} + \dots + X_{\phi(n+1)} \geq \psi(n)$$

$$X_{\phi(n)+1} + \dots + X_{\psi(n)} \geq -(\psi(n) - (\phi(n)+1)) \quad X_{\psi(n)+1} + \dots + X_{\phi(n+1)} \leq \phi(n+1) - (\psi(n)+1) \\ = -\psi(n) + \phi(n)+1$$

$$X_{\phi(n)+1} + \dots + X_{\psi(n)} + X_{\psi(n)+1} + \dots + X_{\phi(n+1)} \geq \psi(n) - \psi(n) + \phi(n+1) = \phi(n)+1$$

$$X_{\phi(n)+1} + \dots + X_{\psi(n)} + X_{\psi(n)+1} + \dots + X_{\phi(n+1)} \leq \phi(n+1) - (\psi(n)+1) - \phi(n) \\ = \phi(n+1) - \psi(n) - \phi(n) - 1$$

$$\text{Notons } a = \psi(n) \quad b = \psi(n) \quad c = \phi(n+1)$$

$$|S_a| \leq a \quad \text{car la marche est } \pm 1 \text{ ou } 0$$

$$S_b = S_a + \sum_{i=a+1}^b X_i \leq S_a - a \leq a - a = 0$$

$$S_c = S_b + \sum_{i=b+1}^c X_i \geq S_b + b \geq -b + b = 0$$

Donc on a $S_b \leq 0$ et $S_c \geq 0$ alors

$$S_n \text{ passe } 0 \text{ en } [a, c] = [\phi(n)+1, \phi(n+1)]$$

$$6] \quad A_n = \{ S_{\phi(n)+1} \leq 0 \} \cap \{ S_{\phi(n+1)} \geq 0 \}$$

$$P(A_n) = P(X_{\phi(n)+1} + \dots + X_{\psi(n)} \leq -\phi(n) \mid P(X_{\psi(n)+1} + \dots + X_{\phi(n+1)} \geq \psi(n))$$

$$P(S_{\phi(n)+1} \leq 0 \mid S_{\phi(n+1)} \geq 0)$$

$$P(|S_{\phi(n+1)} - S_{\phi(n)+1}| \leq \phi(n+1) - \phi(n)+1)$$

$$6) \quad P(|S_{f(k)}| \leq k) = P(S_{f(k)} \geq -k) + P(S_{f(k)} \leq k) \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow P(S_{f(k)} \geq -k) = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$P(|S_{f(k)}| \geq k) = 1 - P(|S_{f(k)}| \leq k) \geq 1 - \varepsilon$$

$$\Rightarrow P(S_{f(k)} \geq k) \geq \frac{1-\varepsilon}{2} \quad \text{par la symétrie}$$

$$P(S_{f(k)} \leq -k)$$

$$\text{Notons } y = \psi(n) - \phi(n) + 1 \quad \text{et } z = \phi(n+1) - \psi(n) + 1$$

$$\text{donc pour } y \quad \exists f(k) \in \mathbb{N} \quad \text{et pour } z \quad \exists f'(k) \in \mathbb{N} \quad \text{tq}$$

$$S(f(k)) \leq -k \geq \frac{1-\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad P(S_{f'(k)} \geq k) \geq \frac{1-\varepsilon}{2}$$

Alors, on introduit ϕ et ψ tq $\phi(1) = 1$

$$\psi(n) = n + f(k) \quad \text{et} \quad \phi(n+1) = \psi(n) + f'(k)$$

$$\text{d'où} \quad \forall n \quad \phi(n) < \psi(n) < \phi(n+1)$$

Pqz ϕ, ψ on obtient A_n dont la probabilité est

$$P(A_n) = P(S_{f(k)} \leq -k) P(S_{f'(k)} \geq k) \geq \frac{(1-\varepsilon)^2}{4}$$

7) D'après 6) les A_n sont indépendantes

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \prod_{n=1}^{+\infty} P(A_n) \geq \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-\varepsilon)^2}{4} = \frac{1}{4} \prod_{n=1}^{+\infty} (1-\varepsilon)^2 \quad \text{diverge.}$$

d'où d'après le lemme de Borel-Cantelli

$$P(A_n \text{ arrive infiniment de fois}) = 1$$

D'après 5) A_n signifie que S_n passe par 0, d'où on obtient

$$P(S_n \text{ passe par 0 infiniment de fois}) = 1$$

8) Soit $m \in \mathbb{Z}$

$$\text{Introduisons } A_n^m = \{X_{\phi(n)+1} + \dots + X_{\psi(n)} \leq -\phi(n) + m\} \cap \{X_{\psi(n)+1} + \dots + X_{\phi(n+1)} \geq \psi(n) + m\}$$

$(A_n^m)_{n \in \mathbb{N}}$ reste indépendante par la même identité à 4)

$$\text{Notons } a = \phi(n)$$

$$b = \psi(n)$$

$$c = \phi(n+1)$$

$$|S_a| \leq a \quad \text{car la marche est } + \text{ ou } -$$

$$S_b = S_a + \sum_{i=a+1}^b X_i \leq S_a - a \leq a - a + m = m$$

$$S_c = S_b + \sum_{i=b+1}^c X_i \geq S_b + b \geq -b + b + m = m$$

$$\text{Donc on a } S_b \leq m \quad \text{et} \quad S_c \geq m \quad \text{alors}$$

$$S_n \text{ passe } n \text{ en } [a, c] = [\phi(n)+1, \phi(n+1)]$$

Donc si A_n^m arrive, alors S_n passe par m .

Par la preuve identique à 6 et 7 on obtient que

S_n passe une infinité de fois par m , donc par 1 aussi.

§) D'après 8 on obtient la conclusion.

10) Or dans 8 $m \in \mathbb{Z}$ était arbitraire alors cela est vraie pour tout $m \in \mathbb{Z}$

Donc $\forall m \in \mathbb{Z}, P(S_n \text{ passe par } m \text{ une infinité de fois}) = 1$

11) On calcule la probabilité que la marche soit en 0 ou en K quand $n \rightarrow \infty$, on obtient la convergence vers 0, ce qui signifie que la marche ne s'arrête jamais en un nombre fixe.

Puis on calcule la probabilité que la marche reste dans un intervalle $[-K, K]$ fermé. On obtient encore la probabilité 0, donc S_n ne reste jamais dans tel intervalle pour tout $K \in \mathbb{N}$

Ensuite, on construit un événement où S_n passe par 0, on trouve que la probabilité ne tend pas vers 0 et par Borel-Cantelli et l'indépendance de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on obtient que A_n repasse par 0 une infinité de fois.

Identiquement on construit $(A_n^m)_{n \in \mathbb{N}}$ événement où S_n repasse par $m \in \mathbb{Z}$ et on obtient encore que S_n repasse par m une infinité de fois.

Par conséquent, S_n repasse par tous les nombres entiers une infinité de fois.