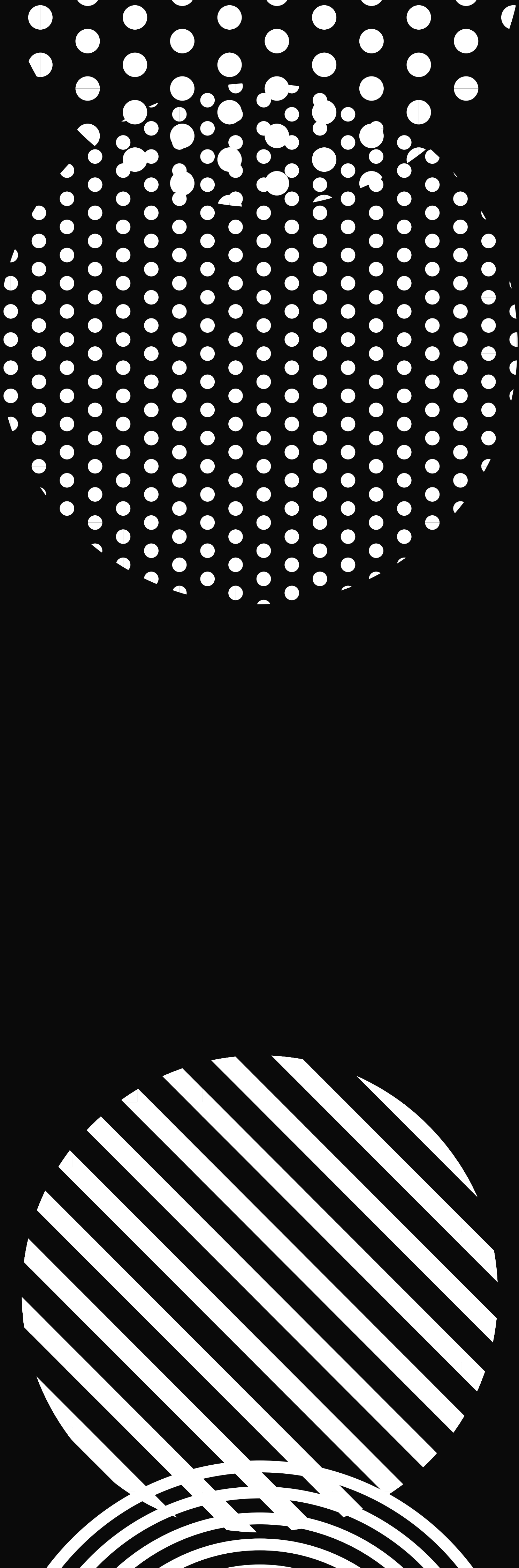


0) S'ils sont pas distincts alors

$\exists \leq i < j \leq n$ tq $x_{(i)} = \dots = x_{(j)}$

S'ils sont tous égaux, alors $x_{(1)} = x_{(n)}$

1) Soient $i \neq j$ Notons $Y = X_i - X_j$ donc Y est une va à densité f_Y car X_i et X_j sont à densité.
D'où $\underset{P(X_i = X_j)}{\underset{\shortparallel}{P(Y=0)}} = 0$ donc $P(X_i = X_j) = 0$

Il y a $\binom{n}{2}$ paires de X_i, X_j donc $\sum_{1 \leq i < j \leq n} P(X_i = X_j) = 0$

2) Pour $k \leq d$

Notons $J_1 = \{1, \dots, n\}$ $i_1 = \min_{i \in J_1} X_i$

$J_2 = J_1 \setminus \{i_1\}$ $i_2 = \min_{i \in J_2} X_i$. Par recurrence $i_k = \min_{i \in J_k} X_i$

$J_k = J_{k-1} \setminus \{i_{k-1}\}$

Introduisons une suit $(x_q^k)_{q \in \mathbb{N}}$ $x_1^1 = i_0$

$\forall k \geq 2$ $\forall j < k$ $x_j^k = x_j^{k-1}$

et donc $J_k = \{1, \dots, n\} \setminus \bigcup_{j=1}^{k} \{x_j^k\}$ $x_k^k = i_k$

$\forall j \geq k+1$ $x_j^k = 0$

Montrons par récurrence que $X_{x_i^n} < X_{x_j^n}$

$P(1)$: $J_1 = \{1, \dots, n\}$ $i_1 = \min_{j \in \{1, \dots, n\}} X_{(j)}$

$x_1^1 = i_1$ $\forall j > 1$ $x_j^1 = 0$

$X_{i_1} \leq X_{i_1}$ OK

$P(r+1)$: Supposons que pour $r < n$
$\forall 1 \leq k \leq r$ $X_{x_1^r} < \dots < X_{x_r^r}$

Donc $\forall 1 \leq k \leq r$ $x_k^{r+1} = x_k^r$ $x_{r+1}^{r+1} = i_{r+1}$

Notons $x_r^r = x_r^{r+1} = i_r$ Or $i_r = x_r^r$ donc

$i_r = \min_{i \in J_r} X_i$ donc $i_r \notin J_{r+1}$
et $X_{i_r} < X_j$ $\forall j \in J_r \setminus \{i_r\} = J_{r+1}$

$x_{r+1}^{r+1} \in J_{r+1}$ donc $X_{x_{r+1}^{r+1}} > X_{i_r}$ où $i_r = x_r^{r+1}$

Alors $X_{x_r^{r+1}} < X_{x_{r+1}^{r+1}}$

Par hyp de réc. $X_{x_1^r} < \dots < X_{x_r^r}$

et comme $\forall 1 \leq k \leq r \quad x_k^{r+1} = x_k^r$ et $X_{x_r^{r+1}} < X_{x_{r+1}^{r+1}}$

donc $X_{x_1^{r+1}} < \dots < X_{x_r^{r+1}} < X_{x_{r+1}^{r+1}}$

Donc par récurence $X_{x_1^n} < \dots < X_{x_n^n}$

Il nous reste à montrer que $\forall 1 \leq i < j \leq n \quad x_i^n \neq x_j^n$

Supposons par l'absurde que $\exists i \leq j-1$ tq $x_i^n = x_j^n$

donc $x_i^n \in J_{i-1} \cap J_{j-1}$

$$J_{i-1} = \{1, \dots, n\} \setminus \bigcup_{q=1}^{i} \{x_q^i\}$$
$$= \{1, \dots, n\} \setminus \bigcup_{q=1}^{i-1} \{x_q^n\}$$

$$J_{j-1} = \{1, \dots, n\} \setminus \bigcup_{q=1}^{j-1} \{x_q^n\}$$

mais $x_i^n \in \bigcup_{q=1}^{j-1} \{x_q^n\}$ car $i \leq j-1$

donc $x_i^n \notin J_{j-1}$ d'où $x_i^n \notin J_{i-1} \cap J_{j-1}$ absurde

donc x_i^n sont tous distinctes.

$\left|\bigcup_{i=1}^{n} \{x_i^n\}\right| = |\{1, \dots, n\}|$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad x_i^n \in \{1, \dots, n\}$

Notons donc $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \in S_n$

σ est unique car à chaque pas de constrcution de x_i^n il existe une seule i tq X_i plus petit que les autres.

2) Normal.

Il existe toujours $\sigma \in S_n$ tq

$$(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}) = (X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{(n)})$$

Or $X_1, \ldots, X_n$ sont tous distincts, donc si on prends $\sigma' \in S_n$ tq $X_{\sigma'(1)} < \ldots < X_{\sigma'(n)}$

Alors $\sigma'(1)$ est l'indice tq $X_{\sigma'(1)}$ est le plus petit parmi $X_1, \ldots, X_n$ donc $\sigma'(1) = \sigma(1)$

On retire $\sigma'(1)$ et $X_{\sigma'(1)}$ donc $X_{\sigma'(2)}$ est le plus petit entre $\{X_1, \ldots, X_n\} \setminus \{X_{\sigma(1)}\}$ donc $\sigma'(2) = \sigma(2)$
en continuant pareillement, $\sigma' = \sigma$ d'où l'unicité.

3) $|S_n| = n!$ $\quad P(S_n \ni \sigma = \Sigma) = \frac{1}{n!}$

Donc Σ suit la loi uniforme discrète de paramètre $n!$

4) $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Bornée

a)
$$\sum_{\sigma \in S_n} \phi(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) \mathbb{1}_{\{\Sigma = \sigma\}}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n \setminus \{\Sigma\}} \phi(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) \underbrace{\mathbb{1}\{\Sigma = \sigma\}}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \phi(X_{\Sigma(1)}, \ldots, X_{\Sigma(n)})$$

$$= 0 + \phi(X_{\Sigma(1)}, \ldots, X_{\Sigma(n)})$$ d'après 2) $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\Sigma(i) = (i)$
$X_{\Sigma(i)} = X_{(i)}$

$$= \phi(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$$

b) On a $(X_1, \ldots, X_n)$ un n échantillons de μ, donc $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d}{\sim} \mu$

Soit $\sigma \in S_n$ donc $\forall^{j \neq} i \in [\![1, n]\!]$ $\sigma(i) \neq \sigma(j)$
donc avec σ nous réordonnons les $X_1, \ldots, X_n$

d'où $X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}$ des v.a. tous distinct

mais $X_{\sigma(i)} \in \{X_1, \ldots, X_n\}$ donc $X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)} \overset{i.i.d}{\sim} \mu$

d'où $(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$ est un n échantillon.

$$\mathbb{E}[\phi(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)})\mathbb{1}_{\{\Sigma=\sigma\}}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\phi(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)})\mathbb{1}_{\{\Sigma=\sigma\}}|\sigma]]$$

$$= \sum_{\Sigma\in S_n}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})\mathbb{1}_{\{\Sigma=\sigma\}} f(x_{\sigma(1)})\dots f(x_{\sigma(n)})\,dx_{\sigma(1)}\dots dx_{\sigma(n)}\,P(\sigma=\Sigma)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\underbrace{\phi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})\mathbb{1}_{\{\Sigma=\sigma\}}}_{=\phi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})\mathbb{1}_{\{X_{\sigma(1)}<X_{\sigma(2)}<\dots<X_{\sigma(n)}\}}} f(x_{\sigma(1)})\dots f(x_{\sigma(n)})\,dx_{\sigma(1)}\dots dx_{\sigma(n)}$$

Si $x_1<\dots<x_n$ donc on prend $\sigma=id$

БЛЯ !!! ДА Я
ВАХУИ С ЭТОЙ ЗАДАЧИ

$\Sigma\in S_n$ est une permutation tq

$X_{\Sigma(1)}<\dots<X_{\Sigma(n)}$

Alors $\phi(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)})\mathbb{1}_{\{\Sigma=\sigma\}} = \phi(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)})\mathbb{1}_{\{X_{\sigma(1)}<\dots<X_{\sigma(n)}\}}$

Donc en posant $g(x_1,\dots,x_n)=\phi(x_1,\dots,x_n)\mathbb{1}_{\{x_1<\dots<x_n\}}$

On a $\phi(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)})\mathbb{1}_{\{\Sigma=\sigma\}} = \phi(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)})\mathbb{1}_{\{X_{\sigma(1)}<\dots<X_{\sigma(n)}\}}$

$$\mathbb{E}[\phi(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)})\mathbb{1}_{\{\Sigma=\sigma\}}]$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\phi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})\mathbb{1}_{\{x_{\sigma(1)}<\dots<x_{\sigma(n)}\}} f(x_{\sigma(1)})\dots f(x_{\sigma(n)})\,dx_{\sigma(1)}\dots dx_{\sigma(n)}$$

remplaçons $y_e = x_{\sigma(e)}$

$$\hookrightarrow = \int_{\mathbb{R}^n}\phi(y_1,\dots,y_n)\mathbb{1}_{\{y_1<\dots<y_n\}} f(y_1)\dots f(y_n)\,dy_1\dots dy_n$$

$$= \mathbb{E}[\phi(X_1,\dots,X_n)\mathbb{1}_{\{X_1<\dots<X_n\}}]$$

4) $\mathbb{E}[\phi(X_{(1)},\dots,X_{(n)})] = \mathbb{E}[\sum_{\sigma\in S_n}\phi(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)})\mathbb{1}_{\{\Sigma=\sigma\}}]$

$$= \sum_{\sigma\in S_n}\mathbb{E}[\phi(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)})\mathbb{1}_{\{\Sigma=\sigma\}}]$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x_1,\dots,x_n)\mathbb{1}_{\{x_1<\dots<x_n\}} f(x_1)\dots f(x_n)\,dx_1\dots dx_n$$

$$= n!\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x_1,\dots,x_n)\mathbb{1}_{\{x_1<\dots<x_n\}} f(x_1)\dots f(x_n)\,dx_1\dots dx_n$$

5)

$$E[g(X_{(k)})] = E[g(\phi(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}))] \quad \text{où}$$

$$\phi(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) = X_{(k)}$$

$$Y = \phi(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$$

On va procéder en plusieurs étapes.

On a symmetrie de la densité jointe

$\underline{\prod_{i=1}^{n} f(x_i)}$

On cherche à calculer $E[g(X_{(k)})] = E[\phi(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) \mathbb{1}_{\{\Sigma = \sigma\}}]$

$$= E[g(X_{(k)}) = \mathbb{1}\{\Sigma = \sigma\}]$$

on choisissant
$\phi(X_1, \dots, X_n) = g(X_k)$

$$E[g(X_{(k)})] = E[\phi(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})]$$

$$= n! \int_{\mathbb{R}^n} g(x_k) \prod_{i=1}^{n} f(x_i)\, dx_i$$

$$= n! \int_{x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n} g(x_k) \prod_{i=1}^{n} f(x_i)\, dx_i$$

$$= n! \int_{x_1 < \dots < x_{k-1} < x} \int_{x} \int_{\substack{x_{k+1} < \dots < x_n \\ x^c}} g(x)\, f(x)^{k-1} f(x)\, f(x)^{n-k}\, dx \dots dx$$

avec $x_{k-1} < x < x_{k+1}$

$$= n! \int_x g(x) f(x) \underbrace{\left(\int_{x_1 < \dots < x_{k-1}} \prod_{i=1}^{k-1} f(x_i)\, dx_1 \dots dx_i \right)}_{= \frac{1}{(k-1)!} \left(\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \right)^{k-1} = \frac{1}{(k-1)!} \mu(]-\infty, x])^{k-1}} \underbrace{\left(\int_{x_{k+1} < \dots < x_n} \prod_{i=k+1}^{n} f(x_i)\, dx_{k+1} \dots dx_n \right)}_{= \frac{1}{(n-k)!} \left(\int_{x}^{+\infty} f(t)\, dt \right)^{n-k} = \frac{1}{(n-k)!} \mu([x, +\infty[)^{n-k}} dx$$

$$\to = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) \mu(]-\infty, x])^{k-1} \mu([x, +\infty[)^{n-k}\, dx$$

Donc la densité de loi de $X_{(k)}$ est $x \mapsto \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \mu(]-\infty, x])^{k-1} \mu([x, +\infty[)^{n-k} f(x)$

Partie 2

6) $X_{(1)}$ ~~$X_{(1)} \sim Unif([0,1])$~~

$$x \mapsto \frac{n!}{0!(n-1)!} \lambda([x,1])^{n-1} f(x) = n\, \lambda([x,1])^{n-1} f(x) = n(1-x)^{n-1} f(x)$$

$\to Beta(1,n)$

$X_{(2)}$

$$x \longmapsto \frac{n!}{1!(n-2)!} \lambda([0,x])\, \lambda([x,1])^{n-2} f(x) = n(n-1)\, x(1-x)^{n-2} f(x)$$

БЛЯ дебил меж $X_{(2)}$ аже X_2

7) ~~$Y = X_{(2)} - X_{(1)}$~~

~~$$E[g(Y)] = \int g \, dP_Y = \iint g \, dP_{X_{(1)}} P_{X_{(2)}}$$~~

~~$$= \int_0^1\int_0^1 g(x_{(2)} - x_{(1)})\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x_1)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x_2)\, dx_{(2)}\, dx_{(1)}$$~~

~~$y = x_{(2)} - x_{(1)}$ $\quad y_1 = 1 - x_1$ $\quad y_0 = 0 - x_1$~~

~~$y - x_1 = 0 \Rightarrow y = x_1$~~

~~$y - x_1 = 1 \Rightarrow y = 1 + x_1 \Rightarrow y - 1 = x_1$~~

~~$$= \int_{-1}^1 g(y) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,1]}(x_1)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(y - x_1)\, dx_1}\, dy$$~~

~~$(0,1)$ $\quad x_1$ $\quad 1 - 0$ $\quad (-1,0)$ $\quad -1 - (-1)$ $\quad y - x$~~

~~$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,1]}(x_1)\, \mathbb{1}_{[y-1,y]}(x_1)\, dx_1$$~~

~~$$= \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,1]}(x_1)\, \mathbb{1}_{[y-1,y]}(x_1)\, dx_1$$~~

~~$$= \int_{-1}^1 g(y) \left(\int_0^1 \mathbb{1}_{[0,1]}(x_1)\, \mathbb{1}_{[y-1,y]}(x_1)\, dx_1 \right) dy$$~~

f_1 $\quad f_2$ sont les lois de $X_{(1)}$ et $X_{(2)}$

$Y = X_{(2)} - X_{(1)}$

est à densité

$$f_{X_{(1)}, X_{(2)}}(x_1, x_2) = \underset{x_1}{n} \underbrace{(n-1)}_{x_2} \underbrace{(1-x_2)^{n-2}} \underbrace{f(x_1)} \underbrace{f(x_2)}$$

$X_3, \dots, X_n$

$$E[g(V-u)] = \int_{[0,1]^2} g(v-u)\, f_{X(1),X(2)}(u,v)\,du\,dv$$

$$d = v-u \qquad\qquad d_1 = 1-u$$
$$d_0 = 0-u$$

$$\Rightarrow v = d+u$$

$$\int_0^1 \int_{-u}^{1-u} g(d)\, f_{X(1),X(2)}(u,d+u)\,du\,dd$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-u} g(d)\, f_{X(1),X(2)}(u,d+u)\,du\,dd$$

$$\mathcal{D} = \{(u,d) \in \mathbb{R}^2 : 0<u<1 \wedge 0<d<1-u\}$$

$$= \{(u,d) \in \mathbb{R}^2 : 0<u<1 \wedge \qquad d-1<-u$$
$$-d+1>u$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 0<u<1-d \\ 0<d \wedge d<1 \end{cases}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-d} g(d)\, f_{X(1),X(2)}(u,d+u)\,du\,dd$$

$$= \int_0^1 g(d) \underbrace{\left(\int_0^{1-d} f_{X(1),X(2)}(u,d+u)\,du\right)}_{f_Y(d)} dd$$

$$\int_0^{1-d} n(n-1)(1-d-u)^{n-2}\,du$$

$$y = 1-d-u \qquad\qquad dy = -du \Rightarrow du = -dy$$

$$= -\int_{1-d}^{0} n(n-1)\,y^{n-2}\,dy = \int_0^{1-d} n(n-1)\,y^{n-2}\,dy$$

$$= \left[n(n-1)\frac{y^{n-1}}{(n-1)}\right]_0^{1-d}$$

$$= n(1-d)^{n-1} = f_{\mathcal{D}}(d)$$

Beta$(1,n)$

2) $X_{(1)}$

$$f_{X_1}(x)\; x \mapsto \frac{n!}{0!(n-1)!}\lambda([x,1])^{n-1} = n\,\lambda([x,1])^{n-1}$$
$$= n(1-x)^{n-1}$$

$X_{(2)}$

$$f_X(x)\; x \longmapsto \frac{n!}{1!(n-2)!}\lambda([0,x])\,\lambda([x,1])^{n-2}$$

$$= n(n-1)\,x(1-x)^{n-2}$$

$$f_{X_{(1)},X_{(2)}}(x_1,x_2) = n(n-1)(1-x_2)^{n-2} \neq f_{X_1}(x)\,f_{X_2}(x) = n^2(n-1)\,x(1-x)^{2n-3}$$

D'où $X_{(1)}$ et $X_{(2)}$ ne sont pas indépendantes.

9)

$$P(X_1 = x_1 \cap X_2 - X_1 = d) = P(X_1 = x_1) P(X_2 - X_1 = d \mid X_1 = x_1)$$
$$= P(X_1 = x_1) P(X_2 = d + x_1)$$

$$f_{X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}}(x_1, q) = f_{X_{(1)}}(x_1) \, f_{X_{(2)}}(q + x_1)$$
$$= n(1-x_1)^{n-1} f(x_1) \, n(n-1)(q+x_1)(1-x_1-q)^{n-2} f(x_1+q)$$
$$= n^2(n-1)(1-x_1)^{n-1}(1-x_1-q)^{n-2}(q+x_1) f(x_1) f(x_1+q)$$
$$\neq f_{X_{(1)}}(x_1) \, f_{X_{(2)} - X_{(1)}}(q)$$

D'où $X_{(1)}$ et $X_{(2)} - X_{(1)}$ ne sont pas indépendantes.

10) D'après 5) $X_{(k)}$ suit la loi à densité :

$$x \mapsto \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \mu(]-\infty, x])^{k-1} \mu([x, +\infty[)^{n-k} f(x)$$

Or $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} Unif([0,1])$

donc $X_{(k)}$ suit la loi à densité

$$x \mapsto \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \lambda([0,x])^{k-1} \lambda([x,1])^{n-k} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \sim Beta(k, n-k+1)$$

11) $$E[X_{(k)}] = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \, dx$$

$$\cancel{= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^1 x^k \sum_{j=1}^{n-k} \binom{n-k}{j} 1^j (-x)^{n-k-j} \, dx}$$
$$\cancel{= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^1 \sum_{j=1}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j} (x)^{n-j} \, dx}$$
$$\cancel{= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \sum_{j=1}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j} \int_0^1 (x)^{n-j} \, dx}$$
$$\cancel{= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \sum_{j=1}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j} \left[\frac{x^{n-j+1}}{n-j+1} \right]_0^1}$$
$$\cancel{= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \sum_{j=1}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j} \frac{1}{n-j+1}}$$

THERE IS EASIER WAY

$$E[X_{(k)}] = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\,dx$$

$$J_{k,n} := \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\,dx$$

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx$$

$$u = (1-x)^{n-k} \qquad dv = x^{x} dx$$

$$du = -(n-k)(1-x)^{n-k-1} \quad \Rightarrow v = \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$J_{k,n} = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx = \underbrace{\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}(1-x)^{n-k}\right]_0^1}_{=0} + \frac{(n-k)}{k+1}\int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}\,dx$$

$$= \frac{(n-k)}{k+1} J_{k+1,n}$$

$$J_{n,n} = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

$$J_{k,n} = \frac{(n-k)}{k+1}\,\frac{(n-k-1)}{k+2}\,\frac{(n-k-2)}{k+3}\cdots\frac{1}{n}\,\frac{1}{n+1} = \frac{(n-k)!\;k!}{(n+1)!}$$

D'où $\quad E[X_{(k)}] = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\,\dfrac{(n-k)!\,k!}{(n+1)!} = \dfrac{k}{n+1}$

12) $P(nX_{(1)} \geq t) = P(X_{(1)} \geq \frac{t}{n}) = 1 - P(X_{(1)} < \frac{t}{n})$

$$= 1 - F_{X_{(1)}}\left(\tfrac{t}{n}\right)$$

$$= 1 - \int_0^{\frac{t}{n}} \underbrace{\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{(k-1)!}} x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$$

$$\sim 1 - \int_0^{\frac{t}{n}} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$$

$$\frac{t}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Donc $\forall t,\ P(nX_{(1)} \geq t) = 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nX_{(1)} \neq 0$

$$P(X_{(1)} \geq \tfrac{t}{n}) = P(X_i \geq \tfrac{t}{n})^n = \left(1 - \tfrac{t}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t}$$

$F_{X_{(1)}}\left(\frac{t}{n}\right) = 1 - P(X_{(1)} \geq \frac{t}{n}) = 1 - e^{-t}$ donc $nX_{(1)}$ cv. vers la loi $Exp(1)$

13) $S_n(t) = P(n X_{(2)} \geq t) = \cancel{P(X_{(2)} \geq \frac{t}{n}) = P(X_i \leq \frac{t}{n}) P(X_i \geq \frac{t}{n})^{n-1}}$

$$\cancel{= \frac{t}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}}$$

$$\cancel{= \left(\frac{t}{n}\right)\left(\frac{n}{n-t}\right)\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}}$$

$$\cancel{= \underbrace{\frac{t}{n-t}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \underbrace{\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

$$P(n X_{(2)} \geq t) = P\left(X_{(2)} \geq \frac{t}{n}\right) = 1 - F_{X_{(2)}}\left(\frac{t}{n}\right)$$

$$= 1 - \int_0^{\frac{t}{n}} n(n-1)x(1-x)^{n-2}\,dx$$

$$\left(P(n X_{(2)} \geq t)\right)' = \left(1 - \int_0^{\frac{t}{n}} n(n-1)x(1-x)^{n-2}\,dx\right)'$$

$$= -n(n-1)\frac{t}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{-2}\frac{1}{n}$$

$$= -\cancel{n}(n-1)\frac{t}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2}\frac{1}{\cancel{n}}$$

$$\sim -t\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -t e^{-t}$$

$$S(t) = \lim_{n\to+\infty} S_n(t) = S(0) + \int_0^t S'(s)\,ds = 1 + \int_0^t -s e^{-s}\,ds$$

$$= 1 + \left[e^{-s}(1+s)\right]_0^t$$

$$= 1 + e^{-t}(1+t) - 1 = e^{-t}(1+t)$$

Donc $P(n X_{(2)} \geq t) \longrightarrow e^{-t}(1+t)$

donc $F(t) = 1 - e^{-t}(1+t)$

$F'(t) = t e^{-t}$

Donc $n X_{(2)}$ cv vers Gamma$(2,1)$

On a la densité de $X_{(k)}$:

$$x \mapsto \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$J_{k,n} = \int_0^1 t^{k-1}(1-t)^{n-1} = \underbrace{\left[\frac{t^k}{k}(1-t)^{n-1}\right]_0^1}_{=0} + \frac{n-1}{k}\int_0^1 t^k(1-t)^{n-2}$$

$$= \frac{n-1}{k} J_{k+1,n-1} \qquad J_{n+k,0}$$

$$P(nX_{(k)} \ge t) = P\left(X_{(k)} \ge \frac{t}{n}\right) = P\left(X_{(k)} < \frac{t}{n}\right) = \int_0^{\frac{t}{n}} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k}dx$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\int_0^{\frac{t}{n}} x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$$

$$J_{k,n} = \int_0^{\frac{t}{n}} x^{k-1}(1-x)^{n-k}\,dx$$

$$u = (1-x)^{n-k} \qquad dv = x^{k-1}$$

$$du = -(n-k)(1-x)^{n-k-1} \qquad v = \frac{x^k}{k}$$

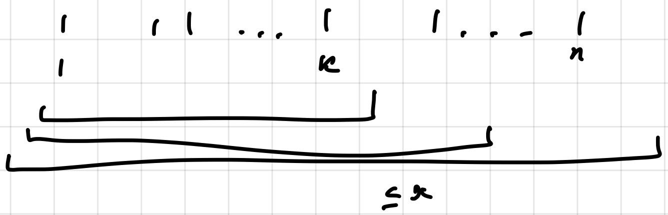
$$J_{k,n} = \underbrace{\left[\frac{x^k}{k}(1-x)^{n-k}\right]_0^{\frac{t}{n}}}_{} + \frac{n-k}{k}\int_0^{\frac{t}{n}}(1-x)^{n-k-1}x^k$$

$$\frac{\left(\frac{t}{n}\right)^k}{k}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k}\left(\frac{t}{n}\right)^k\left(\frac{n-t}{n}\right)^n\left(\frac{n}{n-t}\right)^k$$

$$= \frac{1}{k}\left(\frac{n-t}{n}\right)^n\left(\frac{t}{n-t}\right)^k$$

$$P(X_{(k)} < x) = \sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j} = P(Bin(n,x) \ge k)$$



posons $x = \frac{t}{n}$

$$P\left(X_{(k)} \ge \frac{t}{n}\right) = 1 - P\left(X_{(k)} < \frac{1}{n}\right) = 1 - P\left(Bin\left(n,\frac{t}{n}\right) > k\right)$$

$$= P\left(Bin\left(n,\frac{t}{n}\right) \le k\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(Bin\left(n,\frac{t}{n}\right) \le k\right) = P(Poisso(t) \le k)$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(nX_{(k)} < t) = 1 - P(Pois(t) \le k) = P(Pois(t) \ge k) = 1 - e^{-t}\sum_{j=0}^{k}\frac{t^j}{j!}$$

$$= P(Gamma(k,1) \le t)$$

$\mathrm{Pois}\left(\frac{\alpha}{x}\right)$ Intuition

$$P(\mathrm{Gamma}(\alpha, t) \leq x) = P(\mathrm{Pois}(tx) \geq \alpha)$$

Donc $n X_{(k)}$ cv vers la loi $\mathrm{Gamma}(k,1)$

14) $\mu \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$

$$x \longmapsto \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \mu(]-\infty, x])^{k-1} \mu([x, +\infty[)^{n-k} f(x)$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(1 - e^{-\alpha x}\right)^{k-1} \left(e^{-\alpha x}\right)^{n-k} \alpha e^{-\alpha x}$$

15) $$E[X_{(k)}] = \int_0^{+\infty} x \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} (1 - e^{-\alpha x})^{k-1} (e^{-\alpha x})^{n-k} \alpha e^{-\alpha x} \, dx$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \alpha \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\alpha x})^{k-1} (e^{-\alpha x})^{n-k+1} \, dx$$

$t = e^{-\alpha x}$ $\quad t_i = 0$, $t_f = 1$

$dt = -\alpha e^{-\alpha x} dx$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{-\alpha t} dt$

$$\Rightarrow = -\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \underbrace{\int_0^1 (1 - t)^{k-1} (t)^{n-k} \, dt}_{J_{k-1,n}}$$

$$J_{k,n} = \int_0^1 (1-t)^k (t)^{n-k}$$

$u = t^{n-k}$ $\quad dv = (1-t)^k$

$du = (n-k) (t)^{n-k-1}$ $\quad v = -\frac{(1-t)^{k+1}}{k+1}$

$$J_{k,n} = \underbrace{\left[t^{n-k} \left(- \frac{(1-t)^{k+1}}{k+1} \right) \right]_0^1}_{=0} + \frac{n-k}{k+1} \int_0^1 t^{n-k-1} (1-t)^{k+1}$$

$$= \frac{n-k}{k+1} J_{k+1,n}$$

$$J_{n,n} = \int_0^1 (1-t)^n = \left[- \frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = - \frac{1}{n+1}$$

Donc $\quad J_{k-1,n} = \frac{n-k+1}{k} \; \frac{n-k}{k+1} \; \frac{n-k-1}{k+2} \cdots \left(-\frac{1}{n+1}\right)$

$$= -\frac{(n-k+1)!\,(k-1)!}{(n+1)!}$$

D'où $\quad E[X_{(k)}] = -\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \left(-\frac{(n-k+1)!\,(k-1)!}{(n+1)!}\right)$

$$= \frac{n-k+1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{k}{n+1} = 1 - \frac{k}{n+1}$$

16) $X_{(1)}$ est à densité

$$x \mapsto \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \left(1-e^{-\alpha x}\right)^{k-1} \left(e^{-\alpha x}\right)^{n-k} \alpha e^{-\alpha x}$$

$$= \frac{n!}{(n-1)!} \left(e^{-\alpha x}\right)^{n-1} \alpha e^{-\alpha x}$$

$$= n\alpha e^{-\alpha n x} \qquad \sim \quad Exp(\alpha n)$$

17) $f_{X_{(1)},X_{(2)}}(x_1,x_2) = n(n-1)\, \mu([x_2,+\infty[)^{n-2} f(x_1) f(x_2)$

$$= n(n-1) \left(e^{-\alpha x_2}\right)^{n-2} \alpha^2 e^{-\alpha x_1} e^{-\alpha x_2}$$

Posons $V = X_{(2)}$ et $\mathcal{U} = X_{(1)}$

$$E[g(V-U)] = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} g(v-u)\, f_{u,v}(u,v)\,du\,dv$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} g(v-u)\, n(n-1) \left(e^{-\alpha v}\right)^{n-2} \alpha^2 e^{-\alpha v} e^{-\alpha u}\,du\,dv$$

$$= \alpha^2 n(n-1) \int_0^{+\infty} g(v-u) \left(e^{-\alpha v}\right)^{n-1} e^{-\alpha u}\,du\,dv$$

$d = v-u \qquad d^+ = +\infty - u = +\infty$

$\qquad\qquad\qquad d^- = 0 - u = -u$

$dd = (v-u)'dv = dv$

$$= \alpha^2 n(n-1) \int_0^{+\infty}\int_{-u}^{+\infty} g(d) \left(e^{-\alpha(d+u)}\right)^{n-2} e^{-\alpha(d+u)} e^{-\alpha u}\,dd\,du$$

$$\mathcal{D} = \begin{cases} 0 < u \\ u < +\infty \\ -u < d \\ d < +\infty \end{cases}$$

$-d < u < +\infty$

$0 < d < +\infty$

$$= \alpha^2 n(n-1) \int_0^{+\infty} g(d) \int_{-d}^{+\infty} \left(e^{-\alpha(d+u)}\right)^{n-2} e^{-\alpha(d+u)} e^{-\alpha u}\,du\,dd$$

$$= \alpha^2 n(n-1) \int_0^{+\infty} g(d) \int_{-d}^{+\infty} e^{-\alpha(n-2)d} e^{-\alpha(n-2)u} e^{-\alpha d} e^{-\alpha u} e^{-\alpha u}\,du\,dd$$

$$= \alpha\, n(n-1) \int_0^{+\infty} g(d)\, e^{-\alpha(n-1)d} \left(\int_{-d}^{+\infty} \alpha e^{-n\alpha u}\,du\right) dd$$

$$\int_d^{+\infty} \alpha e^{-n\alpha u}\,du = \left[-\frac{e^{-\alpha u}}{n}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n}\Big(\underbrace{-e^{-\alpha(+\infty)}}_{=0} + e^{-\alpha\cdot 0}\Big)$$

d pos donc

$$= e^{\alpha 0}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$= (n-1)n\int_0^{+\infty} g(d)\,\alpha e^{-\alpha d(n-1)}\,\frac{1}{n}\,dd$$

$$= (n-1)\int_0^{+\infty} g(d)\,\alpha e^{-\alpha d(n-1)}\,dd$$

$$= \int_0^{+\infty} g(d)\,\underbrace{\alpha(n-1)e^{-\alpha d(n-1)}}\,dd$$

donc $X_{(2)} - X_{(1)}$ suit $\mathrm{Exp}(\alpha(n-1))$

18

$$P(V-U=d \cap U=u) = P(V-u=d \mid U=u)\,P(U=u)$$
$$= P(V=d-u \mid U=u)\,P(U=u)$$

$$P(V-U\geq d \cap V\geq v) = P(V-U\geq d \mid V\geq v)\,P(V\geq v)$$
$$= \underbrace{P(U\geq v-d \mid V\geq v)}\,P(V\geq v)$$
$$= P(U\geq -d)\,P(V\geq v) \quad \text{car } U \text{ exp}$$

HE A A

$$f_{X_{(1)},X_{(2)}}(x_1,x_2) = n(n-1)\,\mu([x_2,+\infty[)^{n-2} f(x_1) f(x_2)$$
$$= n(n-1)\left(e^{-\alpha x_2}\right)^{n-2}\alpha^2 e^{-\alpha x_1} e^{-\alpha x_2}$$

$$f_{X(1),X(2)-X_{(1)}}(x_1,d)$$
$$= f_{X(1),X(2)}(x_1, d+x_1) = n(n-1)\left(e^{-\alpha(d+x_1)}\right)^{n-2}\alpha^2 e^{-\alpha x_1} e^{-\alpha(d+x_1)}$$
$$= \alpha^2 n(n-1)\,e^{-\alpha(n-2)(d+x_1)} e^{-\alpha x_1} e^{-\alpha(d+x_1)}$$
$$= \alpha^2 n(n-1)\,e^{-\alpha(n-2)d} e^{-\alpha(n-2)x_1} e^{-\alpha x_1} e^{-\alpha d} e^{-\alpha x_1}$$
$$= \alpha^2 n(n-1)\,e^{-\alpha(n-1)d} e^{-\alpha n x_1}$$
$$= \alpha(n-1)e^{-\alpha(n-1)d}\cdot \alpha n e^{-\alpha n x_1}$$
$$= f_{X_1}(x_1)\,f_{X(2)-X_{(1)}}(d)$$

Donc $X_{(1)}$ et $X_{(2)} - X_{(1)}$ sont indépendantes.

19)

Supposons que $X_{(0)} = 0$

Notons pour $1 \leq k \leq n$ $Y_{(k)} = X_{(k)} - X_{(k-1)}$

On cherche à calculer $f_{Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}}$ et montrer que

$f_{Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}} = f_{Y_{(1)}} \cdot f_{Y_{(2)}} \cdot \dots \cdot f_{Y_{(n)}}$

Soient $x_1, \dots, x_n \in (\mathbb{R}_+)^n$ tq $x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_n$

$$f_{X_{(1)}, \dots, X_{(n)}}(x_1, \dots, x_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = n! \, \alpha^n \prod_{i=1}^{n} e^{-\alpha x_i}$$

posons $y_i = x_i - x_{i-1}$ $\qquad = n! \, \alpha^n e^{-\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i}$

$$x_i = \sum_{j=1}^{i} y_j$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} y_j = \sum_{j=1}^{n} (n-j+1) y_j$$

d'où $f_{X_{(1)}, \dots, X_{(n)}}(x_1, \dots, x_n) = n! \alpha^n e^{-\alpha \sum_{j=1}^{n} (n-j+1) y_j}$

$$= f_{Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}}(y_1, \dots, y_n)$$

$$= n! \prod_{i=1}^{n} \alpha e^{-\alpha(n-i+1) y_i}$$

D'où $Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}$ sont indépendantes

et $Y_{(i)} \sim Exp(\alpha(n-i+1))$