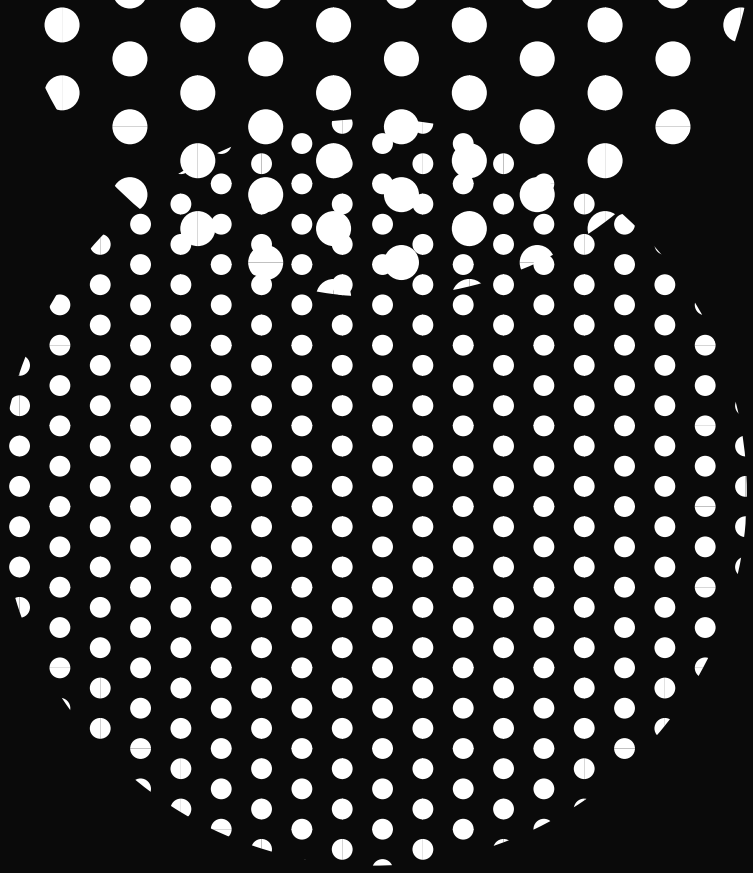

Problème 1

$$A_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

1) $(A_\infty)^c = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)$

2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n = A_n \setminus \bigcup_{0\leq k\leq n-1} A_k$

$B_0 = A_0$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$ $p \in \mathbb{N}$

$B_n = A_n \setminus \bigcup_{0\leq k\leq n-1} A_k$

$B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \left(\bigcup_{0\leq k\leq n-1} A_k \cup A_n\right)$

Soit $x \in B_{n+1}$ Or $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \left(\bigcup_{0\leq k\leq n-1} A_k \cup A_n\right)$

donc $x \notin A_n$ donc $x \notin B_n$

Supposons $n \leq p-1$

$B_n = A_n \setminus \bigcup_{0\leq k\leq n-1} A_k$

$B_p = A_p \setminus \bigcup_{0\leq k\leq p-1} A_p$

$\bigcup_{0\leq k\leq n-1} A_k \subset \bigcup_{0\leq k\leq p-1} A_p$

$A_n \subset \bigcup_{0\leq k\leq p-1} A_p$

Donc $A_p \setminus \bigcup_{0\leq k\leq p-1} A_p \cap A_n = \emptyset$ d'où

$\forall\ n, k \in \mathbb{N}$ tq $n \leq k-1$ $B_n \cap B_k = \emptyset$

4] On va procéder par récurrence

$P(N)$: $\underbrace{\bigcup_{n\leq N} A_n}_{Q_n} = \bigcup_{n\leq N} B_n$

$P(0)$: $A_0 = B_0$ d'après 2]

Supposons que $P(N)$ vrai

$P(N+1)$ $\overbrace{\bigcup_{n\leq N+1} A_n} = \bigcup_{n\leq N} A_n \cup A_{N+1} = \bigcup_{n\leq N} B_n \cup A_{N+1}$

$\bigcup_{n\leq N+1} B_n = \bigcup_{n\leq N} B_n \cup B_{N+1}$

$= \bigcup_{n\leq N} B_n \cup \left(A_{N+1} \setminus \overbrace{\bigcup_{0\leq k\leq N} A_n}^{Q_N}\right)$

D'après l'hypothèse de récurrence

$Q_N = \bigcup_{n\leq N} B_n$

d'où $\bigcup_{n\leq N} B_n \cup (A_{N+1} \setminus Q_N) = \bigcup_{n\leq N} B_n \cup A_{N+1} = \bigcup_{n\leq N+1} A_n$

$\bigcup_{n\leq N+1} B_n$

D'où $\forall N \in \mathbb{N}$ $\bigcup_{n\leq N} B_n = \bigcup_{n\leq N} A_n$

en faisant $N \to +\infty$ on a

$A_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$

5] Or $\mathcal{F}$ est un tribu, par définition de la tribu

Si on a une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq

$\forall n\in\mathbb{N}$ $Q_n \in \mathcal{F}$ et Q_n sont 2 à 2 disjoint,

on a $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(Q_n)$

Or $A_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, B_n sont 2 à 2 disjoint

et $\forall n\in\mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{F}$ et $B_n = A_n \cap \left(\bigcup_{0\leq k\leq n-1} A_k\right)^c$

$= \left(A_n^c \cup \left(\bigcup_{0\leq k\leq n-1} A_k\right)^c\right)^c \in \mathcal{F}$

donc $P(A_\infty) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(B_n)$

$\quad\quad\quad

Problème 2

1) $E(\varphi(X)) = \sum_{n \geq 0} P(X=n)\,\varphi(n)$

$\forall s \in [0,1] \qquad g_X(s) = E(s(X))$

$$g_X(s) = E(s^X) = \sum_{n \geq 0} \underbrace{P(X=n)}_{\substack{\leq 1 \\ \text{car proba}}} \underbrace{s^n}_{<1} \quad \text{car} \quad s<1$$

d'où $g_X(s)$ est bien défini

g_X est dérivable de tout ordre car une somme des fonction dérivables de tout ordre (polynômial).

2) $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$

$$g_X(s) = E(s^X) = \sum_{n \geq 0} P(X=n)\,s^n = P(X=0)s^0 + P(X=1)s^1$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s = g_X(s)$$

3) $g_X(0) = P(X=0)s^0 + s(P(X=1) + P(X=2)s + P(X=3)s^2 + \dots)\big|_{s=0}$

$= P(X=0)$

$$g_X^{(n)}(0) = \overset{=0}{P(X=0)^{(n)}} + \overset{=0}{\left(P(X=1)s\right)^{(n)}} + \dots + \overset{=0}{\left(P(X=n-1)s^{n-1}\right)^{(n)}}$$
$$+ P(X=n)s^n + \underset{=0}{s}(P(X=n+1) + P(X=n+2)s + P(X=n+3)s^2 + \dots)$$
$$= n!\,P(X=n)$$

$$\frac{g_X^{(n)}(0)}{n!} = P(X=n)$$

Donc g_X caractérise la loi de X car on peut obtenir la probabilité de toute valeur de X par g_X

4) $E[X^k] = \sum_{n\geq 0} P(X=n)\, n^k$

$$(s^n)^{(k)} \qquad (n s^{n-1})^{(k-1)} = x^2 (n\cdot(n-1) s^{n-2})^{k-2}$$

$$g_X^{(k)}(s) = k!\, P(X=k) + (k+1)!\, P(X=k+1)\, s + ((k+2)\cdot\ldots\cdot 3)\, P(X=k+2)\, s^2 + \ldots$$

$$= \sum_{n\geq k} \frac{n!}{(n-k)!} P(X=n)\, s^{n-k}$$

$$\lim_{s\to 1^-} g_X^{(k)}(s) = \sum_{n\geq k} \frac{n!}{(n-k)!} P(X=n) = E[X(X-1)(X-2)\ldots(X-k+1)]$$

Soit $k\in\mathbb{N}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $E[X^k]$ fini

Donc $\sum_{n\geq 0} P(X=n)\, n^k$ est fini

D'où $\sum_{n\geq k} P(X=k)\, n^k$ est fini

On sait qu'il existe $C_k \in \mathbb{R}$ tq

$\forall n\in\mathbb{N}$ $n^k \leq n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$

D'où $\lim_{s\to 1^-} g_X^{(k)}(s) \leq E[X^k]$

donc $\lim_{s\to 1^-} g_X^{(k)}(s)$ fini

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\lim_{s\to 1^-} g_X^{(k)}(s)$ fini, i.e

$$\sum_{n\geq k} \frac{n!}{(n-k)!} P(X=n) = E[X(X-1)(X-2)\ldots(X-k+1)] \text{ fini}$$

$$= E[(X^2-X)(X-2)\ldots(X-k+1)]$$

$$= E[X^k] - E[\ldots] + E[\ldots] = \ell\in\mathbb{R}$$

d'où $E[X^k] < \infty$

$$n^{\underline{k}} = n^k \prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)$$

$$\frac{n^{\underline{k}}}{n^k} = \prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) = \frac{k!}{k^k} \leq 1 \text{ d'où } n^k \leq \frac{k^k}{k!} n^{\underline{k}}$$

$$\text{D'où } \sum_{n\geq 0} n^k P(X=n) = \underbrace{\sum_{0\leq n\leq k-1} n^k P(X=n)}_{\substack{\text{fini car} \\ \text{un nombre} \\ \text{de terme} \\ \text{fini}}} + \sum_{n\geq k} n^k P(X=n)$$

$$\sum_{n\geq k} n^k P(X=n) \leq \underbrace{\frac{k^k}{k!}}_{\substack{\text{fini} \\ \text{car } k \text{ fixé}}} \underbrace{\sum_{n\geq k} \frac{n!}{(n-k)!} P(X=n)}_{= \lim_{s\to 1^-} g_X^{(k)}(s) \text{ qui est fini}}$$

d'où $E[X^k]$ est fini.

5) $g_X^{(2)}(1) = E[X(X-1)] = E[X^2] - \underbrace{E[X]}_{=g_X'(1)}$

Donc $E[X^2] = g_X^{(2)}(1) + g_X^{(1)}(1)$

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = g_X^{(2)}(1) + g_X^{(1)}(1) - \left(g_X^{(1)}(1)\right)^2$$

6)

$$g_{S_n}(s) = E[s^{S_n}] = E[s^{X_1+\dots+X_n}] = \sum_{x_1\geq 0}\sum_{x_2\geq 0}\cdots\sum_{x_n\geq 0} s^{x_1}s^{x_2}\dots s^{x_n} P(X_1=x_1\cap\dots\cap X_n=x_n)$$

$$= E[s^{X_1}s^{X_2}\dots s^{X_n}]$$

$$= \sum_{x_1\geq 0}\dots\sum_{x_n\geq 0} s^{x_1}\dots s^{x_n} P(X_1=x_1)\dots P(X_n=x_n)$$

$$= \sum_{x_1\geq 0} s^{x_1}P(X_1=x_1)\cdot\left(\dots\sum_{x_n\geq 0} s^{x_n}P(X_n=x_n)\right)$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{x_1\geq 0} s^{x_1}P(X_1=x_1)\right)}_{E[s^{X_1}]}\cdot\dots\cdot\left(\sum_{x_n\geq 0} s^{x_n}P(X_n=x_n)\right)$$

But: mq $E[s^{X_1}]E[s^{X_2}]\dots E[s^{X_n}] \underbrace{}_{E[s^{X_1}]\cdot\dots\cdot E[s^{X_n}]}$

$$= \underline{g_{X_1}(s)\cdot\dots g_{X_n}(s)}$$

7) Supposons que $\forall k\in[\![1,n]\!]$ $X_k \sim \mathcal{B}(p)$

Donc $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$

D'après 6) $g_{S_n}(s) = g_{X_1}(s)\cdots g_{X_n}(s)$

Or on a supposé que $X_1,\dots,X_n$ suivent la même loi, donc $\forall\, 0\leq i<j\leq n$ $g_{X_i} = g_{X_j}$

Donc $g_{S_n} = g_{X_1}^n$

$$X_1 X_2 = \sum_{x_1\in\mathbb{N}} x_1 \sum_{x_2\in\mathbb{N}} x_2\, P(X_1=x_1\cap X_2=x_2)$$

$$E[X_1X_2] = \sum_{(x_1,x_2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_1\cdot x_2\, P(X_1=x_1\cap X_2=x_2)$$

8) $Y = X_1 + \dots + X_U$

$$g_Y = g_{X_1 + \dots + X_U} = E[s^{X_1} \cdots s^{X_U}] =$$

$$\sum_{u \in [\![1,n]\!]} \left(\sum_{x_1 \geq 0} \cdots \sum_{x_u \geq 0} s^{x_1} \cdots s^{x_u} P(X_1 = x_1) \cdots P(X_u = x_u) \right) P(U = u)$$

$$\sum_{u \in [\![1,n]\!]} g_{X_1}^u \; P(U = u) = g_U(g_{X_1}) = g_U \circ g_{X_1}$$

$$E[Y] = \sum_{u \in [\![1,n]\!]} u E[X_1] P(U = u) = E[X_1] \sum_{u \in [\![1,n]\!]} u P(U = u) = E[X_1] E[U]$$

9)

On peut écrire $u \in \mathbb{C}$ comme

$u = r e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$

$$g_X(u) = E[\underbrace{(r e^{i\theta})}_{|u| \leq 1}{}^X] = E[r e^{iX\theta}]$$

$$= r E[e^{iX\theta}]$$

$$= r \sum_{n \geq 0} e^{in\theta} P(X = n)$$

$$= \sum_{n \geq 0} r e^{in\theta} P(X = n)$$

$$\leq \sum_{n \geq 0} \underbrace{|r e^{i\theta}|^n}_{\leq 1} P(X = n)$$

$$\leq \sum_{n \geq 0} P(X = n) = 1$$

Donc g_X est bien définie pour $u \in \mathbb{C}$ tq $|u| \leq 1$

$$P(X = k) = \frac{g_X^{(k)}(0)}{k!}$$

$$g_X(e^{i\theta}) = \sum_{n \geq 0} P(X = n) e^{in\theta} \qquad g_X(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} = \sum_{n \geq 0} P(X = n) e^{in\theta} e^{-ik\theta}$$

Or $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$

$$\sum_{n \geq 0} P(X = n) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} P(X = n) e^{-ik\theta} d\theta$$

On peut échanger la somme et l'intégrale car la somme cv et l'intégral ≤ 1

$$\sum_{n\geq 0} P(X=n) \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta}\, d\theta}_{=\begin{cases} 1 & \text{si } n=k \\ 0 & \text{si } n\neq k \end{cases}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\sum_{n\geq 0} e^{in\theta} P(X=n)\right)}_{=g_X(e^{i\theta})} e^{-ik\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_X(e^{i\theta})\, e^{-ik\theta}\, d\theta$$

$$= \sum_{0\leq n\leq k-1} P(X=n)\cdot 0 + P(X=k)\cdot 1$$

$$+ \sum_{n\geq k+1} P(X=k)\cdot 0 = P(X=k)$$

10]

Or g_{X_n} cv simplement donc

$$\lim_{n\to+\infty} g_{X_n}(e^{i\theta}) = g_X(e^{i\theta}) \qquad \forall\, \theta\in[0,2\pi]$$

Donc $$\lim_{n\to+\infty} P(X_n=k) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_{X_n}(e^{i\theta})\, e^{-ik\theta}\, d\theta$$

$$P(X=k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_{n\to+\infty} g_{X_n}(e^{i\theta})\, e^{-ik\theta}\, d\theta$$

$|g_{X_n}(e^{i\theta})| \leq 1$ d'après 9, de plus la fonction 1 est intégrable, donc la limite et l'intégrale sont interchangeable. et

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to+\infty} f_n$$

d'où $$\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \lim_{n\to+\infty} g_{X_n}(e^{i\theta})\, e^{-ik\theta}\, d\theta}_{=P(X=k)} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_{X_n}(e^{i\theta})\, e^{-ik\theta}\, d\theta}_{P(X_n=k)}$$

D'où $$P(X=k) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n=k)$$