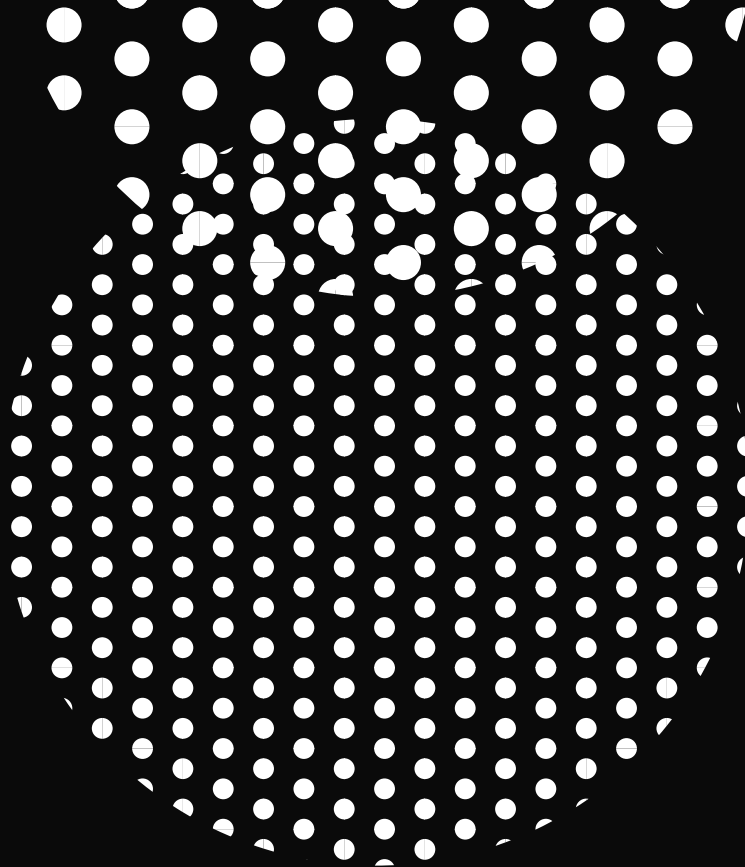




exercice 2

$$\begin{aligned} 1. \quad g(\mu + \eta) - g(\mu) &= \begin{pmatrix} \mu + \eta \\ \mu + \eta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta \\ \eta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta \\ \eta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta \\ \eta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta \\ \eta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta \\ \eta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\eta \mapsto \begin{pmatrix} \eta \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix}$ est linéaire

$$c) \quad \left\| \begin{pmatrix} \eta \\ \eta \end{pmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{pmatrix} \eta \\ \eta \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 0 \left\| \begin{pmatrix} \eta \\ \eta \end{pmatrix} \right\|$$

Donc $D_{\mu} g(\eta) = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix}$ qui est continue en μ car polynomiale, donc g de classe C^1

2) $g^{-1}(\{I_n\})$ ferme car préimage d'un fermé par une fonction continue.

Soit $\mu \in g^{-1}(\{I_n\})$ donc $\begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} = I_n$

$$\begin{aligned} \|\mu - I_n\| &= \left\| \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} I_n - \mu \\ I_n - \mu \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq \|I_n\| + \|I_n\| \\ &= 2\|I_n\| + 2\|I_n\| = 2n \end{aligned}$$

Donc $\forall \mu \in g^{-1}(\{I_n\}) \quad \mu \in B(I_n, 2n)$

donc $g^{-1}(\{I_n\})$ bornée.

Or $M_n(\mathbb{R})$ isomorphe à $\mathbb{R}^{n^2}$ donc le théorème de compacité dans $\mathbb{R}^n$ s'applique, donc

$g^{-1}(\{I_n\})$ est compact.

3) D'après 1

$$D_{\mu} g(\eta) = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$4) \quad O_n \quad u \quad u(t) = (u_{i,j}(t))_{i,j \leq n}$$

$$u'(t) = (u'_{i,j}(t))_{i,j \leq n}$$

$${}^t u(t) u(t) = I_d$$

i.e

$$\frac{d}{dt} \left({}^t u(t) u(t) \right) = u'(t)^T u(t) + u^T(t) u'(t) = \frac{d}{dt} (y_n) = 0$$

5) préimage d'un fermé ^{si} par une fonction continue et
 6) pas bornée.