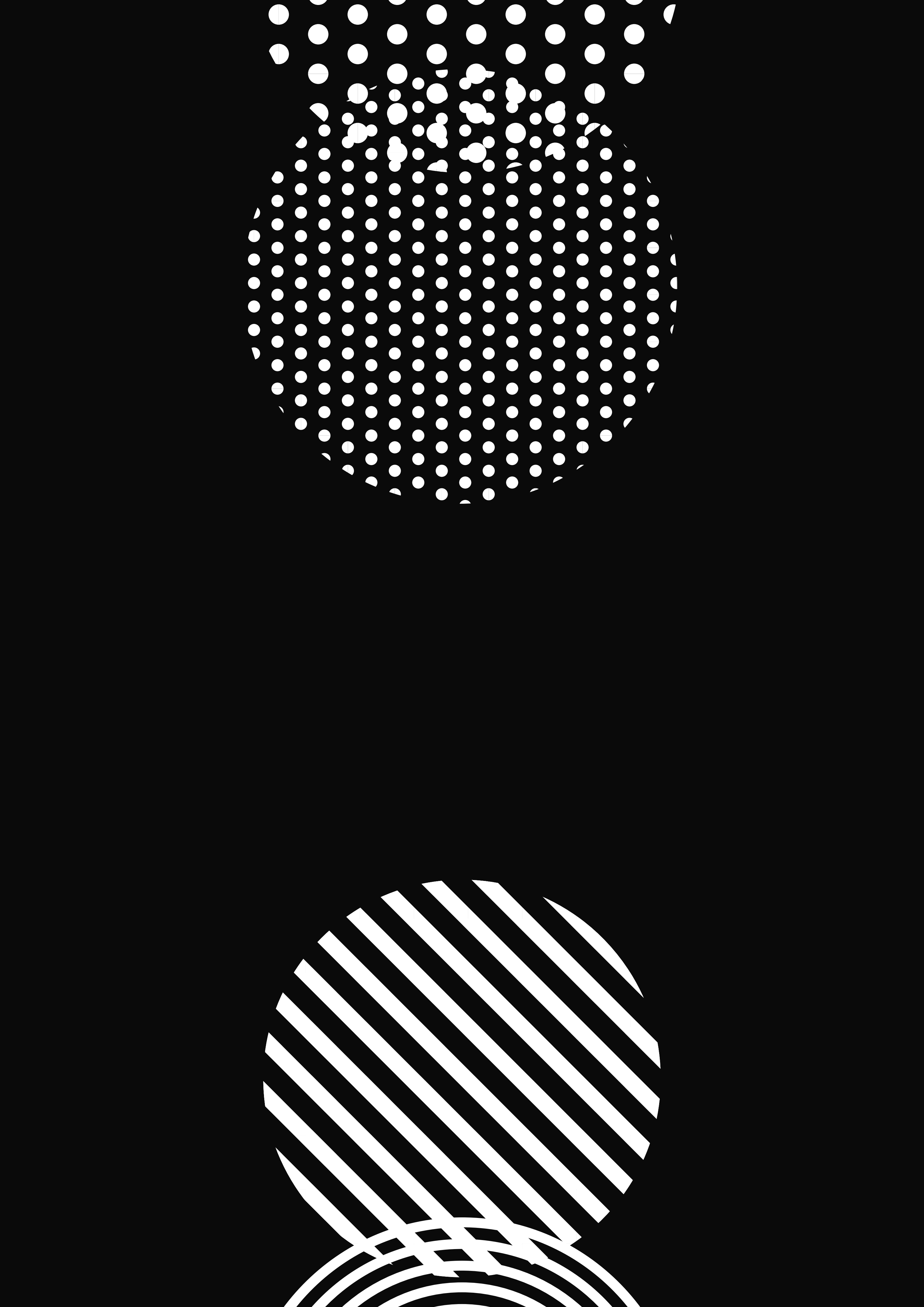


Exercice 2.1 2.1, 2.5. 3.2, 3.4

1. $\vec{\nabla} f_a(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - ay - 2 \\ 2y - ax - 2 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{H}_{f_a}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -a & 2 \end{pmatrix}$$

2. $\det \mathcal{H}_{f_a}(x,y) = 4 - a^2$

$\operatorname{Tr} \mathcal{H}_{f_a}(x,y) = 4 > 0$ donc il faut que determinant est positive i.e $4 - a^2 > 0$

$\Leftrightarrow 4 > a^2 \Leftrightarrow a^2 < 4$

$\Leftrightarrow a \in [-2,2]$

4. Soit $a \in]-2,2[$

$$\vec{\nabla} f_a(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - ay - 2 \\ 2y - ax - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - ay = 2 \\ 2y - ax = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{a}{2}y = 1 \\ y - \frac{a}{2}x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{a}{2}y$$

$$\Leftrightarrow y - \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4}y = 1$$

$$\Leftrightarrow y\left(1 - \frac{a^2}{4}\right) = 1 + \frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1 + \frac{a}{2}}{1 - \frac{a^2}{4}} \quad \text{et } x = 1 + \frac{a}{2} \frac{1 + \frac{a}{2}}{1 - \frac{a^2}{4}}$$

4. Soit $|a| > 2$

(a) $H_{f_a}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - ay \\ -ax + 2y \end{pmatrix}$

$\left\langle H_{f_a}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 2x - ay \\ -ax + 2y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = 2x^2 - axy - axy + 2y^2$

$= 2x^2 - 2axy + 2y^2$

$$f_a(x,y) - \frac{1}{2}\left\langle H_{f_a}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= x^2 + y^2 - axy - 2x - 2y - \frac{1}{2}(2x^2 - 2axy + 2y^2) = -2x - 2y$$

$f_a(x,y) = x^2+y^2 - axy - 2x - 2y = \left(x - \frac{ay}{2}\right)^2 - \frac{a^2 y^2}{4} + y^2 - 2x - 2y$

$= \left(x - \frac{ay}{2}\right)^2 + y^2\left(1 - \frac{a^2}{4}\right) - 2x - 2y$

$\lim_{\|x,y\| \to +\infty} f_a(x,y) = +\infty$ $\leftarrow$ pour $|a|<2$

mais pour $|a|>2$ $\left(1-\frac{a^2}{4}\right)$ négative donc $y^2\left(1-\frac{a^2}{4}\right) \xrightarrow[\|y\| \to +\infty]{} -\infty$

5) $H_{f_a} = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -a & 2 \end{pmatrix}$ $X^2 - 4X + (4-a^2)$

$(2-a)$ $(2+a)$ $(2-a)(2+a)$

vp: λ λ

Une des valeurs propres est négative Notons la λ_- prenons v_- son vecteur propre.

$\forall t \in \mathbb{R}$

$f_a(t v_-) - \frac{1}{2} \langle H_{f_a}(t v_-), t v_- \rangle$

$f_a(t v_-) - \frac{1}{2} t^2 \langle H_{f_a}(v_-), v_- \rangle$

$= f_a(t v_-) - \frac{1}{2} t^2 \langle \lambda_- v_-, v_- \rangle$

$= f_a(t v_-) - \frac{1}{2} t^2 \lambda_- \langle v_-, v_- \rangle$

$= f_a(t v_-) - \frac{1}{2} t^2 \lambda_- \|v_-\|^2 = -2x - 2y = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} t v_- \rangle$

$\Rightarrow f_a(t v_-) = \frac{1}{2} t^2 \lambda_- \|v_-\|^2 - t \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_- \rangle$

Si $t \to +\infty$ $f_a(t v_-) \longrightarrow -\infty$ car $\lambda_- < 0$

Donc f_a n'a pas de minimum global.

6. Si $a = 2$ $f_a(x,y) = \left(x - \frac{ay}{2}\right)^2 - 2x - 2y$

$y = t$ $x = \frac{at}{2}$

$f\left(\frac{at}{2}, t\right) = -\frac{2at}{2} - 2t = t[-a-2]$

si $a = 2$ $f\left(\frac{at}{2}, t\right) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty$

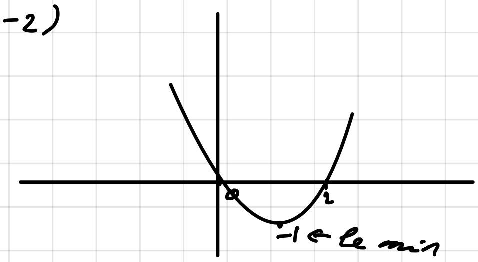
si $a = -2$ $f\left(\frac{at}{2}, t\right) = 0$ $\forall t$

$f_a(x,y) = (x+y)^2 - 2x - 2y$

$= (x+y)^2 - 2(x+y)$

$= (x+y)(x+y-2)$

$g(x) = X(X-2)$



$g(X) \geq -1 \quad \forall X$

$f_a(x,y) = g(x+y) \geq -1$

$f_a(0,1) = -1$ donc f_a admet un minimum global.

Exercice 2.5

$f(x,y) = e^{-x}$ $\qquad$ $h(x,y) = \frac{x^2}{y}$

$\mathcal{L} = e^{-x} - \lambda\left(\frac{x^2}{y}\right)$ $\qquad$ y^{-1}

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -e^{-x} - \frac{2\lambda}{y}x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \lambda x^2 \frac{1}{y^2} = 0 \\ \lambda \frac{x^2}{y} = 0 \end{cases}$$

Si $\lambda < 0$ donc $\frac{x^2}{y} = 0$ donc $x^2 = 0$ donc $x = 0$

d'où $-1 = 0$ impossible

donc $\lambda = 0$ donc $-e^{-x} = 0$ impossible.

min est $x = 0$ et $f(0,y) = e^{-0} = 1$

$\vec{\nabla} h(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{y} \\ -\frac{x^2}{y^2} \end{pmatrix}$ n'est pas qualifié car le gradient est nulle là où la contrainte est active.

$h(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad y \in \mathbb{R}$ donc la seule valeur que $f(x,y)$ prend sous contrainte est 1, donc 1 est le minimum de f.

2. (c) $1 = e^{-x} - \lambda\left(\frac{x^2}{y}\right)$

$= e^{-x} - \lambda \frac{x^2}{y}$

$= 1$

(b) sout: 0.

Exercice 3.2

1. $f(x,y) =$

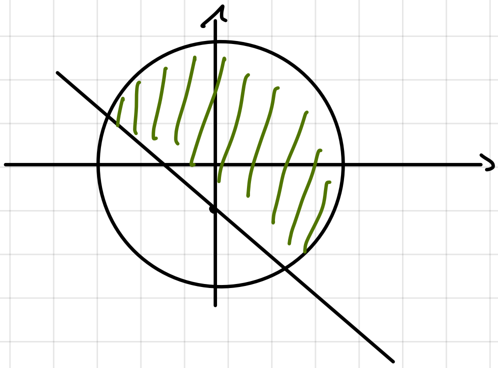
$\langle Ax, x\rangle + Bx + C$

$\langle A\binom{x}{y}, \binom{x}{y}\rangle + \langle B, \binom{x}{y}\rangle + C$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Or A est semi-définie positive donc f est convexe mais n'est pas strictement convexe car n'est pas définie positive.

2)



$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ où $\mathcal{D}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 13\}$

$\mathcal{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \geq -1\}$

Or $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ est une fonction convexe car une somme des fonction convexes, $\mathcal{D}_1$ est une partie convexe.

De même $\mathcal{D}_2$ est convexe car définie par une fonction $(x,y) \mapsto x+y$ qui est convexe car affine.

Or $\mathcal{D}$ est une intersection des partie convexe donc $\mathcal{D}$ est convexe.

c) $h_1(x,y) = x^2+y^2-13$

$h_2(x,y) = -x-y-1$

3) $\vec{\nabla} h_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

$\vec{\nabla} h_2(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\det(\vec{\nabla} h_1, \vec{\nabla} h_2) = \begin{vmatrix} 2x & -1 \\ 2y & -1 \end{vmatrix} = -2x+2y = 0 \iff 2x = 2y \iff x = y$

i.e $\begin{cases} 2x^2-13 \leq 0 \iff 2x^2 \leq 13 \\ -2x \leq 1 \iff x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{array}{l} x^2 \leq \frac{13}{2} \\ x^2 \geq \frac{1}{4} \end{array}$

$\begin{cases} x^2+y^2 = 13 \\ -x-y = 1 \end{cases} \iff (-y-1)^2+y^2 = 13 \iff y^2+2y+1+y^2 = 13$

$\iff 2y^2+2y-12 = 0$

$\iff \Delta = 4 - 4\cdot 2(-12)$

$= 4 + 8\cdot 12$

$= 4 + 96$

$= 100$

$y_1 = \frac{-2-10}{4} = -3 \Rightarrow x = 2$

$y_2 = \frac{-2+10}{4} = 2 \Rightarrow x = -3$

Donc les deux contraintes sont actives en $(2,-3)$ $(-3,2)$ en ces points $x \neq y$ donc les gradients sont libres et donc en ces points les contraintes sont qualifiées.

De plus $\vec{\nabla} h_1$ n'est pas libre en $(0,0)$ mais $h_1(0,0) = -13 < 0$ donc la contrainte n'est pas active en ce point donc est libre.

Si $x \neq y$ les gradients sont libres donc les contraintes sont qualifiées.

Donc les contraintes sont qualifiées en tout point.

4. Or le problème est convexe donc les conditions KKT sont necessaire est suffisant.

5. $\mathcal{L} = x^2+y - \lambda_1(x^2+y^2-13) - \lambda_2(-x-y-1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 1 - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1(x^2+y^2-13) = 0 \\ \lambda_2(-x-y-1) = 0 \end{cases}$$

1) $\lambda_1 < 0$ donc $x^2+y^2-13 = 0 \iff x^2+y^2 = 13$

a) $\lambda_2 < 0$ donc $-x-y = 1$

$$\begin{cases} x(2-2\lambda_1) + \lambda_2 = 0 \\ 1 + 2\lambda_1(x+1) + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$x(2-2\lambda_1) = 1 + 2\lambda_1 x + 2\lambda_1$

$\iff 2x - 2\lambda_1 x = 1 + 2\lambda_1 x + 2\lambda_1$

$\iff x(2-4\lambda_1) = 1 + 2\lambda_1$

Si $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ donc $x(2-2) = 1+1$

$\iff 0 = 2$

impossible donc $\lambda_1 \neq \frac{1}{2}$

donc $x = \frac{1+2\lambda_1}{2-4\lambda_1}$ et $y = -\frac{1+2\lambda_1}{2-4\lambda_1} - 1$

Or les 2 contraintes sont actives donc on est aux points $(2,-3)$, $(-3,2)$

$$\begin{cases} \frac{1+2\lambda_1}{2-4\lambda_1} = 2 \\ -\frac{1+2\lambda_1}{2-4\lambda_1} - 1 = -3 \end{cases}$$

$\iff 1+2\lambda_1 = 4 - 8\lambda_1$

$\iff 10\lambda_1 = 3 \iff \lambda_1 = \frac{3}{10}$ impossible car $\lambda_1 < 0$

$$\begin{cases} \frac{1+2\lambda_1}{2-4\lambda_1} = -3 \end{cases}$$

$\iff 1+2\lambda_1 = -6 + 12\lambda_1$

$\iff -10\lambda_1 = -7 \iff \lambda_1 = \frac{7}{10}$ impossible

car $\lambda_1 \leq 0$

b) $\lambda_2 = 0$

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ 1 - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2\lambda_1 x = 0 \\ 1 - 2\lambda_1 y = 0 \end{cases}$$

$\iff x(2-2\lambda_1) = 0$

$\iff x = 0$

donc $y = \pm\sqrt{13}$

$\iff 1 = 2\lambda_1 y$

donc $y = -\sqrt{13}$

$(0, -\sqrt{13})$ mais $\sqrt{13} - 1 > 0$ donc $(0, -\sqrt{13})$ n'est pas dans $\mathcal{D}$

(2) $\lambda_1 = 0$

donc $\begin{cases} 2x + \lambda_2 = 0 \\ 1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \lambda_2 = -1$ et $x = \frac{1}{2}$

donc $\lambda_2 \neq 0$ d'où $-x - y = 1 \Leftrightarrow y = -x-1$
$= -\frac{1}{2}-1$
$= -\frac{3}{2}$

donc $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) =$
$\frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{1}{4} - \frac{6}{4} = \frac{-5}{4}$ est le min global.

Exercice 3.4

1. $\mathcal{L} = x^2 + y^2 - \mu(x+y-1) - \lambda(-x) = x^2 + (\lambda - \mu)x + y^2 - \mu y + \mu$

2. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - \mu + \lambda = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\mu - \lambda}{2}$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y - \mu = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\mu}{2}$

Or $\mathcal{L}(x)$ est convexe donc $\left(\frac{\mu-\lambda}{2}, \frac{\mu}{2}\right)$ est le point de min global.

d'où $f^*(\lambda,\mu) = \left(\frac{\mu-\lambda}{2}\right)^2 + (\lambda-\mu)\frac{\mu-\lambda}{2} + \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 - \frac{\mu(\mu)}{2} + \mu$

$= \frac{1}{4}\left((\mu-\lambda)^2 - 2(\mu-\lambda)^2 + \mu^2 - 2\mu^2\right) + \mu$
$= \frac{1}{4}\left(-(\mu-\lambda)^2 - \mu^2\right) + \mu = -\frac{1}{4}\left((\mu-\lambda)^2 + \mu^2\right) + \mu$

3. Or $\{(\lambda,\mu) \mid \lambda < 0\}$ est ouvert donc le maximum est atteint à l'intérieur.

$\vec{\nabla} f^*(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\mu-\lambda) \\ -\frac{1}{2}(\mu-\lambda) - \frac{1}{2}\mu + 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{\nabla} f^*(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(\mu-\lambda) & = 0 \\ -\frac{1}{2}(\mu-\lambda) - \frac{1}{2}\mu + 1 & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \lambda \\ 1 = \frac{1}{2}\mu \Leftrightarrow \mu = 2 \end{cases}$$

donc $\lambda = 2$ mais on a supposé que $\lambda < 0$ donc le point critique est à bord où $\lambda = 0$

$$f^*(0,\mu) = -\frac{1}{2}\mu^2 + \mu$$

$$\mu^* = \frac{-b}{2a} = 1$$

$$f^*(0,1) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Donc la solution du problème dual est $\underline{\lambda = 0 \ \mu = 1}$.

4. Le problème est convexe comme f et les contraintes sont convexes.

$g(x,y) = x + y - 1$ donc $g(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$ donc $0 \in g(\mathcal{U})$

de plus pour $x = 1$ et $y = 0$

$h(x,y) = -1 < 0$ et $g(x,y) = 0$ donc $(x,y) \in \mathcal{D}$ et $h(x,y) < 0$ d'où le théorème de Slater s'applique

et $f(\tilde{x}) = \mathcal{L}(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = f^*(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$

D'après 2),
$$x = \frac{\mu - \lambda}{2}$$
$$y = \frac{\mu}{2}$$

D'après 3 $\lambda = 0$ et $\mu = 1$ donc $x = y = \frac{1}{2}$ est le point qui minimise f sous contraintes.