



Exercice 1.1

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\forall i, j \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \text{ est } \mathcal{C}^0 \iff J_f \text{ est } \mathcal{C}^0$$

Exercice 1.2

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

Abstract: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linéaire

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t e_i) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x) + t f(e_i) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} f(e_i) = f(e_i) \end{aligned}$$

d'où $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathbb{R}^m$ existe et vaut $f(e_i)$

Concret:

f est linéaire donc $f(x) = Ax \quad x \in \mathbb{R}^n \quad A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = A e_i = \begin{pmatrix} 0, \dots, 1, \dots, 0 \end{pmatrix}_{\substack{\text{ième} \\ \text{7:ème}}}$$

$$D_{f,x} = A$$

$$D_{f,x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \mid \dots \mid \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

$$D_{f,x}(x) = AH$$

2] ① $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$$f(x+h) - f(x) = \mathcal{D}_{f_x}(h) + o(\sqrt{h})$$

$$= f(x) + f(h) - f(x) = f(h)$$

$h \mapsto f(h)$ est linéaire et on a

$$f(x+h) - f(x) = f(h) + 0 = f(h) + o(\|h\|)$$

à h fixé

$x \mapsto \mathcal{D}_{f_x}(h) = f(h)$ est constante, donc continue.

3]

Exercice 1.4

$$U \subset \mathbb{R}^n$$

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

de $\mathcal{C}^1$

$$F: U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \langle f(x), x \rangle$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathcal{D}_{f_x}: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

$$\mathcal{D}_{F_x}: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$F(x+h) = \langle f(x+h), x+h \rangle = \langle f(x) + \mathcal{D}_{f_x}(h) + o(h), x+h \rangle$$

$$= \langle f(x), x \rangle + \langle \mathcal{D}_{f_x}(h), x \rangle + \langle f(x), h \rangle + \langle \mathcal{D}_{f_x}(h), h \rangle + \langle o(h), h \rangle$$

$$F(x+h) = \langle f(x), x \rangle + \langle f(x), h \rangle + \langle \mathcal{D}_{f_x}(h), x \rangle + \langle \mathcal{D}_{f_x}(h), h \rangle + \langle o(h), h \rangle$$

On pose $A_x = h \mapsto \langle f(x), h \rangle + \langle \mathcal{D}_{f_x}(h), x \rangle$

A_x est linéaire

$$(f(x)x)' = f'(x)x + f(x)$$

$$\mathcal{D}_{f_x}(h) = h [f'(x)x + f(x)]$$

parallèle avec une variable

$$F(x+h) = F(x) + A_x(h) + \langle \mathcal{D}_{f_x}(h), h \rangle + o(h), x+h >$$

$$|\langle \mathcal{D}_{f_x}(h), h \rangle| \leq \|h\| \cdot \underbrace{\|\mathcal{D}_{f_x}(h)\|}_{o(1)} \quad \text{par Cauchy-Schwarz}$$

$$\text{D'où } |\langle \mathcal{D}_{f_x}(h), h \rangle| = o(\|h\|)$$

$$\text{De même, } |\langle o(h), x+h \rangle| = o(h)$$

$$\text{On a donc } F(x+h) = F(x) + A_x(h) + o(\|h\|) \quad \text{d'où } DF_x = A_x \text{ pour tout } x$$

Algo:

- 1) écrire la perturbation (x)
- 2) identifier les parties linéaires (en h à x fixe)
- 3) montrer que le reste des termes est en $o(\|h\|)$

Pour $\mathcal{E}'$, F est $\mathcal{E}'$ car F est polynomiale en les t_i et les x_i et chaque t_i est $\mathcal{E}'$.

Exercice 1.3

1) B est une forme bilinéaire

$$\exists A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$B(x, y) = \langle x, Ay \rangle$$

$$A = (B(e_i, e_j))_{i,j \leq n}$$

} aske WHY?

$$B(x, y) = B\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j\right) = \sum_{i,j \leq n} x_i y_j B(e_i, e_j)$$

B est polynomiale en x_i, y_j donc $\mathcal{E}^0$

$$\text{2) } h_x \in \mathbb{R}^n, \quad h_y \in \mathbb{R}^n$$

$$B(x+h_x, y+h_y) = B(x, y) + B(x, h_y) + B(h_x, y) + B(h_x, h_y)$$

$$A_x : (h_x, h_y) \mapsto B(x, h_y) + B(h_x, h_y) \rightarrow \text{différentielle.}$$

$$B(x+h_x, y+h_y) = B(x, y) + \underbrace{A_{(x,y)}(h_x, h_y)}_{=o(\|h_x\|, \|h_y\|)} + B(h_x, h_y)$$

$$|B(h_x, h_y)| = |\langle h_x, Ah_y \rangle| \leq \|h_x\| \|Ah_y\| = o(\|h_x\|, \|h_y\|)$$

3]

$$F(x, y)$$

$$F(x+h, x+h) - F(x, y)$$

$$(= F(x+h, y+h) = F(x, y) + \underbrace{D_{F(x, y)}(h, h)} + o(\dots))$$

Exercice 2.4

1. à faire

2. à faire

3. $\mathbb{R} = 2$ $f: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^2$
 $\mathcal{L}f_{\mathcal{M}}(H) = H\mathcal{M} + \mathcal{M}H$

$$H_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ fixé} \quad \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L}f_{\mathcal{M}}(H_1) = H_1\mathcal{M} + \mathcal{M}H_1$$

est linéaire en $\mathcal{M}$.

La différentielle de cette application est elle même

$$d^2 f_{\mathcal{M}}(H_1, H_2) = \underline{H_1 H_2 + H_2 H_1}$$

$$d^3 f = 0 \quad \text{depend pas de } \mathcal{M}, \text{ donc constante}$$

Exercice 2.3

$$f: \mathcal{M} \longmapsto \det(\mathcal{M}) \in \mathbb{R}$$

$$\underline{1]} \quad \det(\mathcal{M}_{i,j}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i, \sigma(i)}$$

polynomiale en $m_{i,j}$ donc f est C^∞

2] dérivée partielle

Espace de départ est $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\dim = n^2$

$(E_{i,j})$ base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\det(\text{Id} + t E_{i,j}) = \begin{matrix} \text{det de dérivée partielle.} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1+t & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \text{à } j$$

$$\text{si } i=j \quad \det \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1+t \end{pmatrix} = 1+t$$

$$\frac{\partial \det}{\partial E_{i,j}} (\text{Id}) = 1$$

$$\text{si } i \neq j$$

$$\det(\text{Id} + t E_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{donc } \frac{\partial \det}{\partial E_{i,j}} (\text{Id}) = 0$$

$$d \det|_H = \sum_{i,j \leq n} h_{i,j} \frac{\partial \det}{\partial E_{i,j}} (\text{Id})$$

$$d \det|_H = \sum_{i=1}^n h_{i,i} = \text{Tr}(H)$$

3) $A \in GL_n(\mathbb{R})$

$$f(A+H) = \det(A+H)$$

$$= \det(A(\text{Id} + A^{-1}H))$$

$$= \det(A) \det(\text{Id} + A^{-1}H)$$

$$= \det(A) \left(\det(\text{Id}) + \text{Tr}(A^{-1}H) + o(\|A^{-1}H\|) \right)$$

$$= \det(A) + \det(A) \text{Tr}(A^{-1}H) + o(\|H\|)$$

Comme $H \mapsto \det(A) \text{Tr}(A^{-1}H)$ est linéaire de $M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$d_A f(H) = \det(A) \text{Tr}(A^{-1}H)$$

$$A^{-1} = \frac{{}^t \text{Com}(A)}{\det(A)}$$

$$d_A f(H) = \det(A) \text{Tr}\left(\frac{{}^t \text{Com}(A)}{\det(A)} H\right) = \text{Tr}({}^t \text{Com} A \cdot H)$$

$$A \in GL_n(\mathbb{R}) \quad GL_n(\mathbb{R}) \text{ est ouvert.}$$

$$GL_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

$$GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) \quad \underline{\text{est dense}}$$

$M \longrightarrow d_M f(H)$ est C^0 car f est C^∞

Si $M_0 \in M_n(\mathbb{R}) \quad \exists A_m \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} M_0$

$$d_{f_{A_m}}(H) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} d_{f_{M_0}}(H)$$

$$T_2({}^t \text{Com } A_m H) \longrightarrow d_{f_{M_0}}(H)$$

La fonction $A \rightarrow {}^t \text{Com } A$ est C^0

$$A_m \longrightarrow M_0$$

$${}^t \text{Com } A_m \longrightarrow {}^t \text{Com } M_0$$

$$\text{donc } T_2({}^t \text{Com } A_m \cdot H) \longrightarrow T_2({}^t \text{Com } M_0 \cdot H)$$

$$\text{d'où } d_{f_{M_0}}(H) = T_2({}^t \text{Com } M_0 \cdot H)$$

preuve que $GL_n(\mathbb{R})$ dense

$$M_0 \in M_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$$

Soit $\varepsilon > 0$

$$M_0 + \varepsilon \text{Id}$$

$$P(\varepsilon) = \det(M_0 + \varepsilon \text{Id}) \quad \text{et polynomiale en } \varepsilon$$

$$\det(M_0) = P(0) \quad \text{par det}$$

polynôme de degré au plus n .

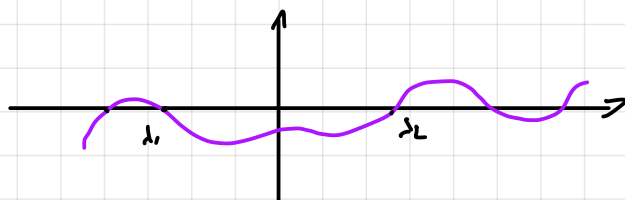
$$\varepsilon \longrightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon \text{Id} + M_0 \\ & \uparrow \\ & \varepsilon \left(\text{Id} + \frac{M_0}{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

$$\det(M_0 + \varepsilon \text{Id}) = \varepsilon^n \det\left(\text{Id} + \frac{M_0}{\varepsilon}\right)$$

$$P(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow +\infty}{\sim} \varepsilon^n \cdot 1 \quad \text{car } \det\left(\text{Id} + \frac{M_0}{\varepsilon}\right) \longrightarrow 1$$

$P(\varepsilon)$ n'est pas nul et de degré n .



$0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ racines de P

$$\forall i \leq n-1, (|\lambda_i|) \Rightarrow p_{|j-1,1|}(\lambda_0) \neq 0$$

$$x_i \leq \min_{i \leq n-1} (|\lambda_i|) \quad p(\frac{x}{2}) \neq 0 \quad \mu_0 + \frac{x}{2} \mathbb{I}_2 \in GL_n(\mathbb{R})$$

5)

$$(\mathbb{I}_d - H)^{-1} = \mathbb{I}_d + H + \underbrace{H^2 + \dots}_{o(\|H\|)}$$

$$(\mathbb{I}_d + H)^{-1} = \mathbb{I}_d - H + o(\|H\|)$$

$$\begin{aligned} (A + H)^{-1} &= (A (\mathbb{I}_d + A^{-1}H))^{-1} = (\mathbb{I}_d + A^{-1}H)^{-1} A^{-1} \\ &= (\mathbb{I}_d - A^{-1}H + o(\|H\|)) A^{-1} \\ &= A^{-1} - A^{-1}H A^{-1} + o(\|H\|) \end{aligned}$$

Exercice 2.1

1. $\frac{\partial F_1}{\partial t}(x, t) = f'(x - ct)x - c$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t^2} = \underbrace{c^2 \cdot f''(x - ct)}_{\frac{\partial F_2}{\partial x^2}} \quad \text{donc} \quad \frac{\partial F_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

Aussi, $\frac{\partial F_1(x, t)}{\partial x^2} = f''(x - ct) = \frac{\partial F_2(x, t)}{\partial x^2}$

2. a. On a $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2c} \right)$

$$c + \frac{\partial \phi}{\partial x \partial y} = 0$$

Aussi, $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x \partial y} = F''(\phi(x, y)) \cdot \underbrace{\phi''(x, y)}_{=0} = 0$

6. $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x \partial y} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \right] = 0$$

$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}(x, y)$ est une fonction constante en x à y fixe

$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}(x, y) = C(y)$ où C est une fonction continue.

Soit $g(y)$ une primitive de $C_1(y)$ $g'(y) = C_1(y)$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} g(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [\tilde{F}(x, y) - g(y)] = 0$$

À x fixé $\tilde{F}(x, y) - g(y) = C_2(x)$ où C_2 est fonction de x

$$\tilde{F}(x, y) = g(y) + C_2(x)$$

$$\phi(x, y) \rightarrow \left(x = \frac{x+y}{2}, y = \frac{y-x}{2c}\right)$$

$$\tilde{F} = F \circ \phi \Leftrightarrow F(t, x) = \tilde{F} \circ \phi^{-1}$$

$$y = x + ct \quad x = x - ct$$