



exercice 1.7

1.] $v_f \in \mathbb{R}^n$ $v_f = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ dans la base canonique
 $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Notons $f(e_1) = q_1 \dots f(e_n) = q_n$ d'où

$$\langle v_f, x \rangle = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i q_i = \langle \vec{q}, \vec{x} \rangle \quad \text{donc si on}$$

prend $v_f = \vec{q}$ on obtient que $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\langle v_f, x \rangle = f(x)$$

2] Supposons qu'il existe $v' \in \mathbb{R}^n$ tq

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \langle v', x \rangle = f(x)$$

$$\text{donc } \langle v_f, x \rangle - \langle v', x \rangle = \langle v_f - v', x \rangle = 0$$

$$\text{donc } v_f - v' \text{ est orthogonal à tout } x \in \mathbb{R}^n \text{ d'où}$$

$$v_f - v' = 0 \Leftrightarrow \underline{v_f = v'}$$

Donc v_f est unique.

exercice 3.1

1. (a) Supposons $K \subset \mathbb{R}$ est compact.

$$\text{donc } \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ dans } K \quad \exists x' \in \mathbb{R} \text{ et } (x_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\text{tq } x_{\phi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x' \in K$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui cv. vers u .

Où K compact donc $\exists \phi$ tq $u_{\phi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u' \in K$
 par l'unicité de limite $u = u'$ donc $u \in K$.
 Or $u \in K$ donc K fermé.

6) $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K , $\|x_k\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$

Or K compact donc $\exists \varphi$ tq $x_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u \in K$

donc $\|x_{\varphi(k)}\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \|u\| \in \mathbb{R}$ par la continuité de la norme.

$$\|x_{\varphi(k)}\| \xrightarrow[\varphi(k) \rightarrow \infty]{} \|u\| \in \mathbb{R}$$

mais on a supposé que $\|x_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$

contradiction

donc K n'est pas compact.

2) $F \subset \mathbb{R}^n$ $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F

(a) On sait que $x_n(t) \in [-M, M]$ car x_n est bornée
Par récurrence

$$\begin{array}{c} M \\ | \\ -M \end{array}$$

$$J_0 = [-M, M] \\ (\alpha_0, \beta_0)$$

$$J_1^+ = \left[\frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}, \beta_0 \right]$$

$$J_1^- = \left[\alpha_0, \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} \right]$$

Il y a un nombre infini d'indices n tq
 $x_n(t) \in J_i$ pour $J_i = J_i^+$ ou J_i^-

$$A_i = \{ n \mid x_n(t) \in J_i \} \text{ infini.}$$

Supposons que $J_n = [\alpha_n, \beta_n]$ et $\{ n \mid x_n(t) \in J_n \}$ est infini
!!
 J_n

On construit de la même manière J_{n+1} et α_{n+1}

$$\text{On a } |\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}| = \frac{\beta_n - \alpha_n}{2} = \frac{2M}{2^{n+1}}$$

On choisit $\varphi(1) \in A_1$, A_2 est infini donc $\exists \varphi(2) \in A_2$ et $\varphi(2) > \varphi(1)$

$$\varphi(n) \in A_n \text{ tq } \varphi(n) > \varphi(n-1)$$

$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est croissante strictement.

$$x_{\varphi(n)} \in J_n \quad x_{\varphi(n+1)} \in J_{n+1}$$

$(x_{\varphi(n)})$ est de Cauchy $\Leftrightarrow x_{\varphi(n)}$ cv.

(6) par 2.a

$$\exists \varphi_1 \quad x_{\varphi_1(1)}(1) \longrightarrow l_1$$

On applique 2.a par la suite $y_n = x_{\varphi_1(n)}$ et par la seconde coordonnée

$$\exists \varphi_2: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \quad \text{tq} \quad x_{\varphi_1(\varphi_2(n))}(2) \longrightarrow l_2$$

c) On obtient $\varphi_1, \dots, \varphi_n$

$$x_{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n(1)}(i) \longrightarrow l_i \quad \forall i$$

$$x_{\varphi_1, \dots, \varphi_n} \in F \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in F$$

3) Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tq $\forall k \in \mathbb{N} \quad A_k \in \mathcal{O}(n)$

Posons $A_k^{(1)} \dots A_k^{(n)}$ vecteurs colonnes de A_k

$A_k \in \mathcal{O}(n)$ donc $\forall i \in \mathbb{N} \quad \|A_k^{(i)}\| = 1$

Donc $A_k^{(i)} \in B_2(\vec{0}, 1)$ fermé et borné de $\mathbb{R}^n$, donc compact.

Donc $\forall i \in \mathbb{N}$, il existe $\varphi_i: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $A_{k(\varphi_i)}^{(i)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A^{(i)} \in B_2(\vec{0}, 1)$

Posons $\begin{matrix} \uparrow \\ \text{tq } \forall i \in \mathbb{N} \end{matrix}$

$$\mathcal{O}(n) = \{ A \mid {}^t A A = I_n \}$$

$$f: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$A \longmapsto {}^t A A - I_n$$

f est $\mathcal{C}^0$ d'où $\mathcal{O}(n)$ est fermé

$$\mathcal{O}(n) = f^{-1}(\{0\}) \quad \text{donc} \quad \mathcal{O}(n) \text{ fermé}$$

$$\mathcal{O}(n) \subset B_2(\vec{0}, 1)^n$$

$\uparrow$ bornée

4) pas borné

POUR QUOI?

Exercice 3.2

1)

$$\forall R > 0 \quad \exists X > 0 \text{ tq } \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| > X \quad f(x) > R$$

2)

$$\text{On pose } R = f(0) \quad \text{et } X = \|0\|$$

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \|x\| > \|0\| \Rightarrow f(x) > \underset{f(0)}{R}$$

3)

f est continue sur $B_f(0, R_M)$ compact

$$\text{donc } \exists x_0 \text{ tq } f(x_0) = \min_{x \in B_f(0, R_M)} f(x)$$

Montrons que $f(x_0)$ est un minimum global.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, montrons que $f(x) \geq f(x_0)$

$$\text{cas 1: } x \in B_f(0, R_M) \quad f(x) \geq f(x_0) \quad \text{OK!}$$

$$\text{cas 2: } \text{si } x \in B_f(0, R_M) \quad \text{Par construction } f(x) \geq f(0) \geq f(x_0) \\ \text{d'où } f(x) \geq f(x_0)$$