Exercice 1.1

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Prop de la norme

$x, y \in \mathbb{R}^n \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \qquad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|x\| = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\| \geq 0$

---

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geq 0$ car $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad |x_i| \geq 0$

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \Rightarrow |x_1| + \dots + |x_n| = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!] \; x_i = 0$
car val abs.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda| |x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda| \|x\|_1$$

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |(x+y)_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \qquad \forall x', y' \in \mathbb{R} \; |x'+y'| \leq |x'| + |y'|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

Donc $\|x\|_1$ est bien une norme

2) Notons $f(t) = \|x - ty\|^2$

$$= \langle x - ty, x - ty \rangle = \langle x, x - ty \rangle - \langle ty, x - ty \rangle$$
$$= \langle x, x - ty \rangle - \langle ty, x \rangle + \langle ty, ty \rangle$$
$$= \langle x, x - ty \rangle - t\langle y, x \rangle + t\langle y, y \rangle$$
$$= \langle x, x \rangle - t\langle x, y \rangle - t\langle y, x \rangle + t\langle y, y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle - 2t\langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle$$

$$\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle y, y \rangle \langle x, x \rangle$$

Si $\Delta > 0$ donc $\exists t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tq $\|x - ty\|^2 < 0$ ce qui est absurde
d'où $\langle x, y \rangle^2 - \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle \leq 0$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle^2 \leq \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}^n$

$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$ Notons $j \in [\![1,n]\!]$ tq $|x_j| = \|x\|_\infty$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \sum_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}} |x_i| + \underbrace{|x_j|}_{= \|x\|_\infty} \ge \|x\|_\infty$$

D'où $\|x\|_\infty \le \|x\|_1$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$ $|x_i| \le \underbrace{\max_{1 \le i \le n} |x_i|}_{\|x\|_\infty}$

D'où $\sum_{i=1}^{n} |x_i| \le \sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty = n \|x\|_\infty$

D'où $\|x\|_1 \le n \|x\|_\infty$

Posons $j \in [\![1,n]\!]$ tq $|x_j| = \|x\|_\infty$

On a $\sqrt{|x_j|^2} = |x_j| = \|x\|_\infty = \sqrt{\|x\|_\infty} \le \underbrace{\sqrt{|x_j|^2 + \sum_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}} |x_i|}}_{= \|x\|_2}$

d'où $\|x\|_\infty \le \|x\|_2$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$ $|x_i| \le \|x\|_\infty = |x_j|$ d'où $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty^2}$

$= \sqrt{n \|x\|_\infty^2}$

$= \sqrt{n} \|x\|_\infty$

Exercice 1.2

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ et $\mathcal{U} = B(x, r)$

montrons que $\mathcal{U}$ est un ouvert.

Soit $x' \in \mathcal{U}$ donc $\|x' - x\| < r$

Notons $\varepsilon = \dfrac{\min(\|x' - x\|, r - \|x' - x\|)}{2}$

Introduisons une boule $V = B(x', \varepsilon)$

Soit $x_v \in V$

$\|x_v - x'\| \le \varepsilon$

$\|x_v - x\| \le \|x_v - x'\| + \|x' - x\|$

$\le (r - \|x' - x\|) + \|x' - x\| = r$

donc $x_v \in \mathcal{U}$

donc $V \subset \mathcal{U}$ or V est une boule ouverte inclu dans $\mathcal{U}$ avec centre un élément de $\mathcal{U}$, donc $\mathcal{U}$ est un ouvert.

2) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ et $F = \overline{B}(x, r)$

$$\underbrace{\left(\overline{B}(x,r)\right)^c}_{E} = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(x,r)$$

Notons $\mathcal{I} = \{ y \in \overline{B}(x,r) : \|y - x\| = r \}$

Soit $x' \in E$

Notons $\varepsilon = \inf_{y \in \mathcal{I}} \|x' - y\|$

$V = B(x', \frac{\varepsilon}{2})$

Soit $y' \in V$ donc $\|y' - x\| \leq \|x' - y\| + \|y - x\|$
$= \|x' - y\| + r > r$

donc $y' \notin F$ donc $y' \in F^c$ d'où

$V \subset F^c$. Or x' est un élément quelconque de E tq $\exists \varepsilon > 0$ tq $B(x', r) \subset E$ donc E est un ouvert. Or E est la complémentaire de F est E est un ouvert donc, par définition, F est un fermé.

Exercice 1.3

$\Rightarrow$ On suppose que $F \subset \mathbb{R}^n$ est fermé

Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite tq $\forall i \in \mathbb{N}$ $x_i \in F$

et $x_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} x$.

On raisonne par l'absurde. On suppose que $x \notin F$
donc $x \in F^c$ qui est ouvert donc $\exists\, \varepsilon > 0$ tq $B(x,\varepsilon) \subset F^c$

Or $x_n \to x$ donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$ $\|x_n - x\| < \varepsilon$ donc
$x_n \in B(x,\varepsilon) \subset F^c$ ce qui est une contradiction.
Donc $x \in F$

$\Leftarrow$ Par contraposé montrons que si F n'est pas fermé alors
$\exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de F qui converge vers $x \notin F$

F^c pas ouvert $\Rightarrow \exists x \in F^c,\ \forall \sigma > 0,\ B(x,\sigma) \cap F \neq \emptyset$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $B(x,\frac{1}{n}) \cap F \neq \emptyset$. Il suffit de prendre
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $B(x,\frac{1}{n}) \cap F$ qui converge vers $x \notin F$, par
contradiction.

Exercice 1.4

1. $\mathbb{R}^n \setminus A^\circ = (A^\circ)^c$ Or A° est une ouvert donc $\mathbb{R}^n \setminus A^\circ$
est un fermé

$\mathbb{R}^n \setminus A \subset \mathbb{R}^n \setminus A^\circ$ car $A^\circ \subset A$

d'où $\overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \subset \overline{\mathbb{R}^n \setminus A^\circ}$

$\overline{\mathbb{R}^n \setminus A^\circ} = \mathbb{R}^n \setminus A^\circ$

d'où $\mathbb{R}^n \setminus A \subset \mathbb{R}^n \setminus A^\circ$

Supposons par l'absurde que l'inclusion est stricte.
$\exists\, x \in (\mathbb{R}^n \setminus A^\circ) \setminus (\overline{\mathbb{R}^n \setminus A})$

Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ ça ne peut pas arriver.
donc $x \in A$ donc $x \in A \setminus A^\circ$

$\overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$ fermé donc $\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)$ est ouvert.

$x \in \mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)$

$\exists \delta \quad B(x,\delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus (\overline{\mathbb{R}^n \setminus A})$

$\mathbb{R}^n \setminus A \subset \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$

$\mathbb{R}^n \setminus (\overline{\mathbb{R}^n \setminus A}) \subset A$

$B(x,\delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus (\overline{\mathbb{R}^n \setminus A}) \subset A \Rightarrow x \in A^\circ$ absurde

$\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ = \underbrace{\bar{A}}_{\text{fermé}} \cap \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus A^\circ)}_{\text{fermé}}$

donc fermé

2) $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \ \& \ B(x,\varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset\}$

$\quad \overset{\shortparallel}{\bar{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}} \subset \bar{A}$

$F \cap A^\circ = \emptyset$ car si $x \in F \cap A^\circ$, $\exists \delta \quad B(x,\delta) \subset A$

d'où $B(x,\delta) \cap \mathbb{R}^n \setminus A = \emptyset$ ce qui est impossible car $x \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$

$F = \bar{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} = \bar{A} \cap \mathbb{R}^n \setminus A^\circ = \bar{A} \setminus A^\circ$

$F \subset \bar{A} \setminus A^\circ$

3) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$

$\partial(\mathbb{R}^n \setminus A) = \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \cap \bar{A}$ d'où $\partial A = \partial(\mathbb{R}^n \setminus A)$

4) A fermé $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ = A \setminus A^\circ \subset A$

Si $\partial A \subset A$

$\bar{A} = \bar{A} \setminus A^\circ \cup A^\circ = \partial A \cup A^\circ \subset A \cup A = A$

d'où $A \subset \bar{A} \subset A$ d'où $A = A$

5) But : A ouvert $\iff \partial A \cap A = \emptyset$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$B = \mathbb{R}^n \setminus A \text{ fermé} \overset{(4)}{\iff} \partial B \subset B$$

$$\partial B \overset{(3)}{=} \partial A \subset \mathbb{R}^n \setminus A$$

<u>Exercice 1.5</u>

Soit $\mathcal{D} = \{ x \in \mathcal{U} \mid h_i(x) \leq 0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq p \}$

Donc pour $x \in \mathcal{D}$, $x \in \mathcal{U}$ et : $h_1(x) \leq 0 \cap \ldots \cap h_p(x) \leq 0$

D'où $\mathcal{D} = \bigcap_{i=1}^{p} h^{-1}(]-\infty, 0])$ donc une intersection finie d'images réciproques des fermés par des applications continues, donc fermé.