Optimise f $\qquad h_1 \leq 0 \quad h_2 \leq 0 \quad h_3 \leq 0$

(1) $\mathcal{L} = f - \lambda_1 h_1 - \lambda_2 h_2 - \lambda_3 h_3$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = \\ \lambda_1 h_1 = 0 \\ \lambda_2 h_2 = 0 \\ \lambda_3 h_3 = 0 \end{cases}$$

Soit $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow h_1 = 0$ Simplifie
Soit $h_1 < 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ Simplifie

Exercice 2.1

$f(x,y) = -x^2 - y^2 \qquad h_1(x,y) = 2x + y - 2 \qquad h_2(x,y) = -x \qquad h_3(x,y) = -y$

$\mathcal{L} = -x^2 - y^2 - \lambda_1(2x + y - 2) - \lambda_2(-x) - \lambda_3(-y)$

$= -x^2 - y^2 - \lambda_1(2x + y - 2) + \lambda_2 x + \lambda_3 y$

KKT
$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -2x - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2y - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1(2x + y - 2) = 0 \\ \lambda_2(-x) = 0 \\ \lambda_3(-y) = 0 \end{cases}$$

faut vérifier que les gradient sont libres ou forment une cône positive ?

$\lambda_3 = 0 \iff h_3 < 0 \iff$ Contrainte h_3 inactive.

Qualifier les solutions

Pour chaque solution, les contraintes actives ont un gradient formant une famille libre.

① $\lambda_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2x + \lambda_2 = 0 \\ -2y + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 x = 0 \\ \lambda_3 y = 0 \end{cases}$

$\lambda_2 = x = \lambda_3 = y = 0$

$x = y = 0$

② $h_1 > 0 \Rightarrow 2x + y = 2$

$\begin{cases} -2x - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 4x - 4 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 2x + y = 2 \\ \lambda_2 x = 0 \\ \lambda_3 y = 0 \end{cases}$

2a) $\lambda_3 = 0$

$\begin{cases} -2x - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 4x - 4 - \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 x = 0 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ et } y = 2 \\ \text{ou} \\ \lambda_2 = 0 \text{ et } \begin{cases} -2x - 2\lambda_1 = 0 \\ 4x - \lambda_1 = 4 \end{cases} \end{cases}$

$\Downarrow$

$-2x - 8x = 0 - 8$

$\Rightarrow x = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$y = 2 - \frac{8}{5}$

2b) $\lambda_3 < 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (x = 1, y = 0)$

Alors $(x, y) = \begin{cases} (0,0) \\ (0,2) \\ (\frac{4}{5}, \frac{2}{5}) \\ (1,0) \end{cases}$

Pourquoi si les gradients des contraintes ne forment pas une famille libre, alors le points ne sont pas qualifiées.

$f(0,0) = 0$

$f(0,2) = -4$

$f(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}) \geq -2$ & ≤ 0

$f(1,0) = -1$

Exercice 2.2

* en $(0,0)$ h_1 et h_2 sont inactifs.

$h_1 = x^2 + y^2 - 5 \leq 0$

$h_2 = x - y - 2$

$\vec{\nabla} h_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

$\vec{\nabla} h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{\nabla} h_1 \parallel \vec{\nabla} h_2$ si $x = -y$

$$\begin{cases} x = -y \\ h_1 = 0 \end{cases} \iff (x,y) = \left(-\sqrt{\tfrac{5}{2}}, \sqrt{\tfrac{5}{2}}\right) = P_1$$

$$\text{ou } (x,y) = \left(\sqrt{\tfrac{5}{2}}, -\sqrt{\tfrac{5}{2}}\right) = P_2$$

$h_2(P_1) \neq 0$ et $h_2(P_2) \neq 0$

en P_1, P_2 $\vec{\nabla} h_1(P_2)$ est libre

et $\vec{\nabla} h_1(P_2)$ est libre

$$\begin{cases} x = -y \\ h_2 = 0 \end{cases} \iff (1,-1)$$

h_1 inactive

h_2 active $\quad \vec{\nabla} h_2 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2)

$$\mathcal{L} = 2x + \beta y - \lambda_1(x^2+y^2-5) - \lambda_2(x-y-2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2 - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \beta - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1(x^2+y^2-5) = 0 \\ \lambda_2(x-y-2) = 0 \end{cases}$$

(1) $\lambda_2 = 0$

$$\begin{cases} 2 - 2\lambda_1 x = 0 \\ \beta - 2\lambda_1 y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2y - \beta x = 0$$

$$y = \frac{\beta x}{2}$$

$\lambda_1 \neq 0$

$$x^2+y^2-5=0 \Rightarrow x^2 + \frac{\beta^2}{4}x^2 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{\beta^2}{4}\right)x^2 = 5$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{1+\frac{\beta^2}{4}}}$$

(2) $\lambda_2 < 0 \iff x - y = 2$

$$\begin{cases} 2 - 2\lambda_1 x - 2\lambda_1 = 0 \\ \beta - 2\lambda_1(x-2) + \lambda_2 = 0 \\ x = y+2 \\ \lambda_1(x^2+y^2-5) = 0 \end{cases}$$

Si $\lambda_1 = 0$, alors λ_2 pas négatif

D'où $\lambda_1 < 0 \Rightarrow x^2+y^2-5=0 \Rightarrow \begin{cases} (y+2)^2 + y^2 - 5 = 0 \\ 2y^2 + 4y - 1 = 0 \end{cases}$

et $x = y \pm 2$

$$y_\pm = \frac{\pm\sqrt{24} - 4}{4} \qquad x_\pm = 2 + y_\pm$$

$\beta = -4$

$x_\pm = \pm 1$ $\qquad y_\pm = -\frac{4x_\pm}{2} = -2x_\pm$

$\qquad\qquad\qquad

$(-1,-1)$ On montre que $\exists (x,y)$ tq $f(x,y) < f(-1,-1)$
i.e $(-1,-1)$ n'est pas un minimum.

$f(-t, \frac{-1}{t}) = -t - \frac{1}{t} < -2$

$P(t) = -t^2 - 1 + 2t$
$P(1) = 0$
$P(t) = -(t^2 + 1 - 2t)$
$= -(t-1)^2$

On voit bien que $\forall t$ $P(t) < 0$ donc $\forall t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $-t - \frac{1}{t} < -2$

Alors $-t(-\frac{1}{t}) = 1$ et $f(-t, -\frac{1}{t}) < -2$ donc $(-1,-1)$ n'est pas un minimum local.

De plus $(-1,-1)$ n'est pas un maximum local.
pour $t > 0$
$f(-1+t, -1+t) = -2 + t > -2$ $\forall t > 0$.

Exercice 2.5

$$f(x,y) = x(1+y^2)$$

$h_1(x,y) = x^2 + y^2 - 4$

$h_2(x,y) = 1 - \frac{x^2}{4} - y$

1.

$K = \{h_1 \leq 0\}$

K est borné car $K = B(0,2)$

$K \cap \{h_2 \leq 0\}$ est fermé et borné donc compact

f est C^0 dessus. Donc f admet un minimum global.

2. $\vec{\nabla} h_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ $\vec{\nabla} h_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x \\ -1 \end{pmatrix}$

$(\vec{\nabla} h_1, \vec{\nabla} h_2)$ pas libre $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ \text{ou} \\ \det(\vec{\nabla} h_1, \vec{\nabla} h_2) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2x & -\frac{1}{2}x \\ 2y & -1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -2x + yx = 0$

D'où

$\vec{\nabla} h_1, \vec{\nabla} h_2$ pas libre $\Rightarrow$ $x(y-2) = 0$

$\mathcal{D} = \{h_1 \leq 0\} \cap \{h_2 \leq 0\}$

si $\{x = 0\} \cap \mathcal{D}$, $p = (0, \alpha)$ où $\begin{cases} \alpha^2 - 4 \leq 0 \\ 1 - \alpha \leq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha \geq 1$ $\quad \alpha \leq \sqrt{4} = 2$ $\quad \alpha \in [1,2]$ $\quad$ si $\alpha \in]1,2[$

donc $h_1(p) < 0$

$h_2(p) < 0$

Sinon $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, mais une seule condition est active, donc

$\vec{\nabla} h_1(0,1) \neq 0$ $\quad \vec{h}_1(0,2) \neq 0$

$\vec{\nabla} h_2(0,1) \neq 0$ $\quad \vec{h}_2(0,2) \neq 0$

Dans les 2 cas $p = (0,1)$ ou $p = (0,2)$, les contraintes sont qualifiées.

$\{y = 2\} \cap \mathcal{D} = \{(0,2)\}$ ← qualifiées.

$\forall\, p \in \mathcal{D}$

si $p \in \{x = 0\} \cup \{y = 2\}$ $\quad$ p est qualifiée

sinon $p \notin \{x = 0\} \cup \{y = 2\}$

$\Downarrow$

$(h_1(p), h_2(p))$ libre $\Rightarrow$ p est qualifié.

3. $\mathcal{L} = x(1+y^2) - \mu_1(x^2+y^2-4) - \mu_2(1 - \frac{x^2}{4} - y)$

cs KKT $\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = (1+y^2) - 2\mu_1 x + \mu_2 \frac{x}{2} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2xy - 2\mu_1 y + \mu_2 = 0 \\ \mu_1(x^2+y^2-4) = 0 \\ \mu_2(1 - \frac{x^2}{4} - y) = 0 \end{cases}$

b) $\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 0}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ 1 - \frac{x^2}{4} - y = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ y^2 - 4 + 4 - 4y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ y(y-4) = 0 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} (x,y) = \begin{cases} (-2,0) \\ (2,0) \end{cases} \end{cases}$

en $x = \pm 2$ $y = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 1 - \pm 4\mu_1 + \mu_2 = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \mu_2 = 0$ dans les 2 cas $\mu_2 = 0$ (pas possible)

$\mu_1 = \pm \frac{1}{4}$ donc $\mu_1 = -\frac{1}{4}$

$(x = -2, y = 0)$

(c) <u>cas 1:</u> $\mu_1 = 0$ et $1 - \frac{x^2}{4} - y = 0$

$\begin{cases} 1 + y^2 + \frac{\mu_2 x}{2} = 0 \\ 2xy + \mu_2 = 0 \\ y = 1 - \frac{x^2}{4} \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} 1 + \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 + \left(-2x + \frac{x^3}{2}\right)x = 0 \\ 2x - \frac{x^3}{2} + \mu_2 = 0 \end{cases}$

$1 + y^2 - \frac{2x^2 y}{2} = 1 + y^2 - x^2 y = 1 + y^2 - (4 - 4y)y$
$= 5y^2 + 1 - 4y$ pas de raci

<u>cas 2:</u> $\mu_2 = 0$ et $x^2 + y^2 = 4$