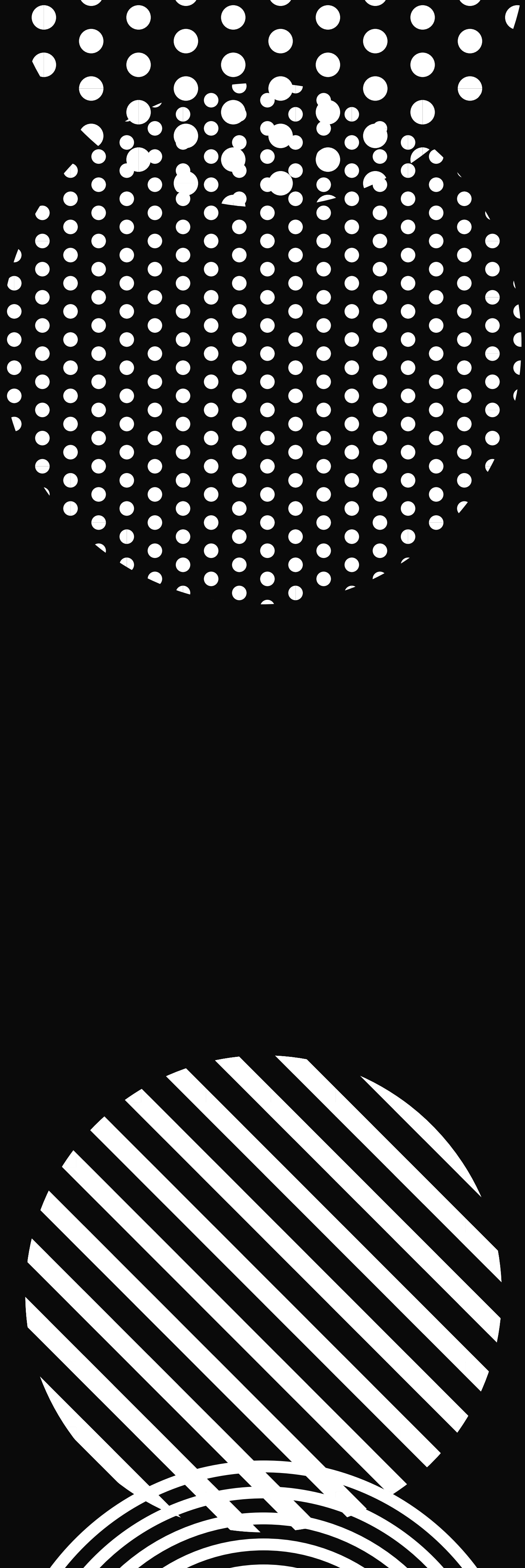


Exercice 1

1. f étant polynomiale est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 2(x-y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 2(x-y)$

Alors $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 2(x-y) \\ 4y^3 + 2(x-y) \end{pmatrix}$

3. $\vec{\nabla} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 2(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 2(x-y) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 4y^3 = 0 \\ 4y^3 + 2(x-y) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = -y^3 \Leftrightarrow x = -y \\ 4y^3 - 4y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y^3 - y = y(y^2-1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \cup y^2 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (y=0, x=0), (y=1, x=-1), (y=-1, x=1)$

Sont les points critiques de f.

4. $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & 2 \\ 2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$

5. $H_f(1,-1) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

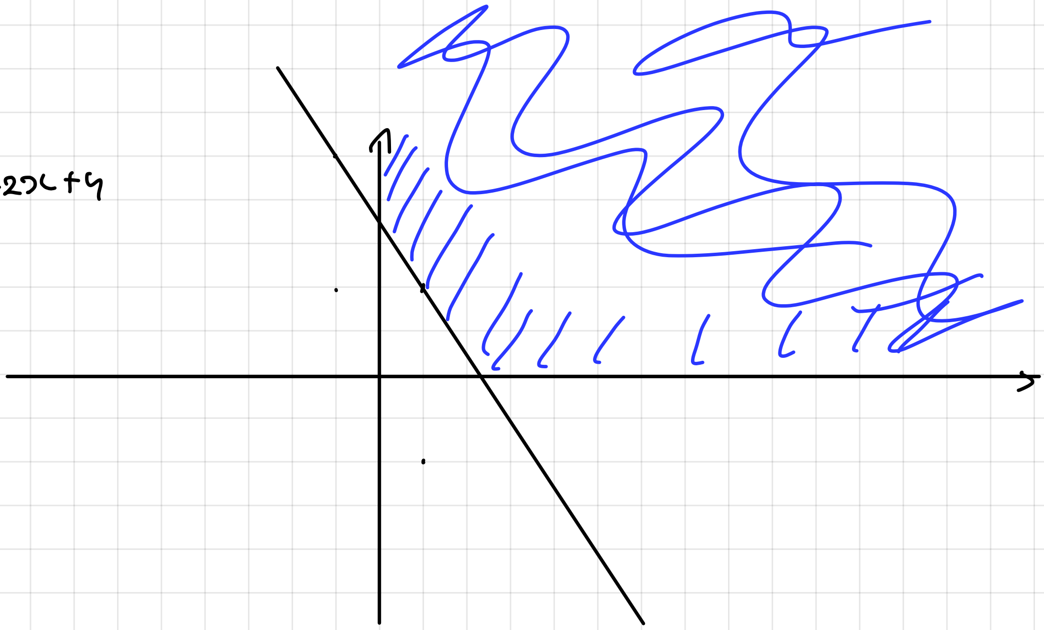
$\det H_f(1,-1) = 100 - 4 > 0$

$\mathrm{Tr}\, H_f(1,-1) = 20 > 0$ donc $H_f(1,-1)$ est définie positive d'où $(1,-1)$ est un minimum local de f.

6.

Exercice 2

1. $y \geq -2x+4$



2. Si le minimum était sur l'intérieur de $\mathcal{D}$ le gradient s'annulerait dans ce point.

Or $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ n'est jamais nul, donc le minimum global n'est pas sur l'intérieur de $\mathcal{D}$.

3. (a) $F_1(x) = 3x$ Or F_1 est strictement croissante, alors F_1 admet son minimum sur point le plus petit donc en $x=2$ et $x=4$ respectivement.
$f(x)=6$ $f(x)=12$

Identiquement pour $F_2(y) = 2y$ $x=2$, $x=4$
$f(x)=4$ $f(x)=8$

(b) $2x+y=4 \Rightarrow y = 4-2x$

$f(x, 4-2x) = 3x + 2(4-2x) = 3x + 8 - 4x = 8-x$

On a $x \geq 0$ et $y \geq 0$ i.e $4-2x \geq 0 \Rightarrow 4 \geq 2x$
$\Rightarrow x \leq 2$

donc on cherche un minimum de f sur $[0,2]$ qui est atteint en $x=2$ et $f(x, 4-2x) = 6$

(c) $\{(x,y) \mid 2x+y=4 \,;\, x\geq 0 \,;\, y \geq 0\}$ étant le bord de $\mathcal{D}$,

d'après (b) f admet son minimum 6 en point

$x=2$ $y = 4-2x = 4-4 = 0$

4. Alors le régime le plus économique est :

2 lentilles et aucune sojà.

Exercice 3

1. (a) On cherche $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$\|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ soit le plus petit.

Donc on peut trouver un minimum de

$x^2+y^2+z^2 := f(x,y,z)$

(b) f étant polynomial est donc de classe C^1

$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

(c) $\vec{\nabla} f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow x = 0 = y = 0 = z$

Or f est positive donc $(0,0,0)$ est le point où le minimum est atteint avec $f(0,0,0) = 0$

2. $\vec{\nabla} g_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{\nabla} g_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \\ 2z \end{pmatrix}$

3. $\vec{\nabla} g_1$ et $\vec{\nabla} g_2$ sont liés s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{\nabla} g_1 = \lambda \vec{\nabla} g_2$

$\forall (x,y,z)$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda 2x \\ -2\lambda \\ \lambda 2z \end{pmatrix} \Rightarrow 4 = -2\lambda \Rightarrow \lambda = -2$

$2 = -4x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$0 = -4z$ $\quad z = 0$

D'où les vecteurs de g_1 et g_2 sont libres.

Alors on peut appliquer la méthode de Lagrange.

4. $\vec{\nabla} f(x,y,z) - \lambda_1 \vec{\nabla} g_1(x,y,z) - \lambda_2 \vec{\nabla} g_2(x,y,z) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda_1 2 - \lambda_2 2x = 0 \\ 2y - \lambda_1 4 + \lambda_2 2 = 0 \\ 2z - \lambda_2 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2z(1-\lambda_2) = 0 \Rightarrow 2z = 0 \text{ ou } \lambda_2 = 1$$

5.

(a) $\lambda_2 = 1$ donc $\begin{cases} 2x - \lambda_1 2 - 2x = 0 \Rightarrow -\lambda_1 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \\ \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x - 2x = 0 \\ 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -1$

$2x - 4 - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$ par g_1

(c) par g_2 $z^2 = -2 - \frac{81}{4} < 0$

ce qui est absurde, alors il n'y a pas d'extremas avec $z \neq 0$, d'où $z = 0$ forcément.

6. $\begin{cases} 2x - \lambda_1 2 - \lambda_2 2x = 0 \\ 2y - \lambda_1 4 + \lambda_2 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda_1 2 - \lambda_2 2x = 0 \\ 2y - 4x + \lambda_2 2 + 4\lambda_2 x = 0 \end{cases}$

$2y = \lambda_1 4 - \lambda_2 2$

$\lambda_1 2 = y + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1 2 - y$

$\lambda_1 2 = 2x - \lambda_2 2x$

D'où $y + \lambda_2 = 2x - \lambda_2 2x$

$\Rightarrow y + \lambda_2 = 2x(1 - \lambda_2)$

On a $x^2 + z^2 - 2y = 0 \Rightarrow x^2 = 2y$ car $z = 0$.

(b)

$2x + 4y - 5 = 0 \Leftrightarrow 4y = 5 - 2x \Leftrightarrow y = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}x$

$2x + 2x^2 - 5 = = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \Delta = 4 + 2 \cdot 4 \cdot 5$
$= 4 + 40 = 44$

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 x = 0 \\ 2y - 4\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$2x = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 x$

$2y = 4\lambda_1 - 2\lambda_2$

$\Rightarrow \frac{5}{4} - \frac{1}{2}x = 2\lambda_1 - \lambda_2$

$\frac{5}{4} - \frac{1}{2}x = 2x - 2\lambda_2 x - \lambda_2$

$\frac{5}{4} - \frac{1}{2}x - 2x = -\lambda_2(2x+1)$

$\Rightarrow \lambda_2 = -\dfrac{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}x - 2x}{2x+1}$ car $x \neq -\frac{1}{2}$

$\lambda_1 = \dfrac{\lambda_2 + y}{2} = \dfrac{\lambda_2 + \frac{x^2}{2}}{2}$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{44}}{4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{11}}{2}$

$y = x^2$

$y = \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{12 \mp 2\sqrt{11}}{8} = \dfrac{6 \mp \sqrt{11}}{4}$

7\. On a montré qu'il y a 2 contraintes :

$\left(\frac{-1+\sqrt{11}}{2}, \frac{6-\sqrt{11}}{4}, 0\right), \left(\frac{-1-\sqrt{11}}{2}, \frac{6+\sqrt{11}}{4}, 0\right)$

qui existes car les λ_1, λ_2 existes pour ces contraintes.

8\.

(a) Soient $(x,y,z) \in D$, alors

$$\begin{cases} 2x + 4y - 5 = 0 \\ x^2 + z^2 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

$x^2 + z^2 + x - \frac{5}{2} = 0$

$x^2 + x - \frac{5}{2} = (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{11}{4}$

$\Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2 + z^2 = \frac{11}{4} \quad =: \varphi(x,z)$

$D = \varphi^{-1}(\{\frac{11}{4}\})$ or φ continue et $\{\frac{11}{4}\}$ fermé

donc D fermé. Or $(x+\frac{1}{2})^2 \geq 0 \; \forall x$ et

$z^2 \geq 0 \; \forall x$ donc $|z| \leq \sqrt{\frac{11}{4}}$

$|x+\frac{1}{2}| \leq \sqrt{\frac{11}{4}}$

Donc $D' = \varphi^{-1}(\{\frac{11}{4}\})$ est bornée. Or $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ et x bornée donc D est bien bornée, de plus fermé donc compact.

(8) Or D compact, donc f admet un minimum et maximum sur D. On a trouvé 2 extremums

$$\left(\frac{-1+\sqrt{11}}{2}\right)^2 + \left(\frac{6-\sqrt{11}}{4}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{11}+11}{4} + \frac{36-12\sqrt{11}+11}{16}$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{11}}{2}\right)^2 + \left(\frac{6+\sqrt{11}}{4}\right)^2$$

$$= \frac{1+2\sqrt{11}+11}{4} + \frac{36+12\sqrt{11}+11}{16}$$

Alors $\left(\frac{-1+\sqrt{11}}{2}, \frac{6-\sqrt{11}}{4}, 0\right)$ est le point le plus proche de l'origine.