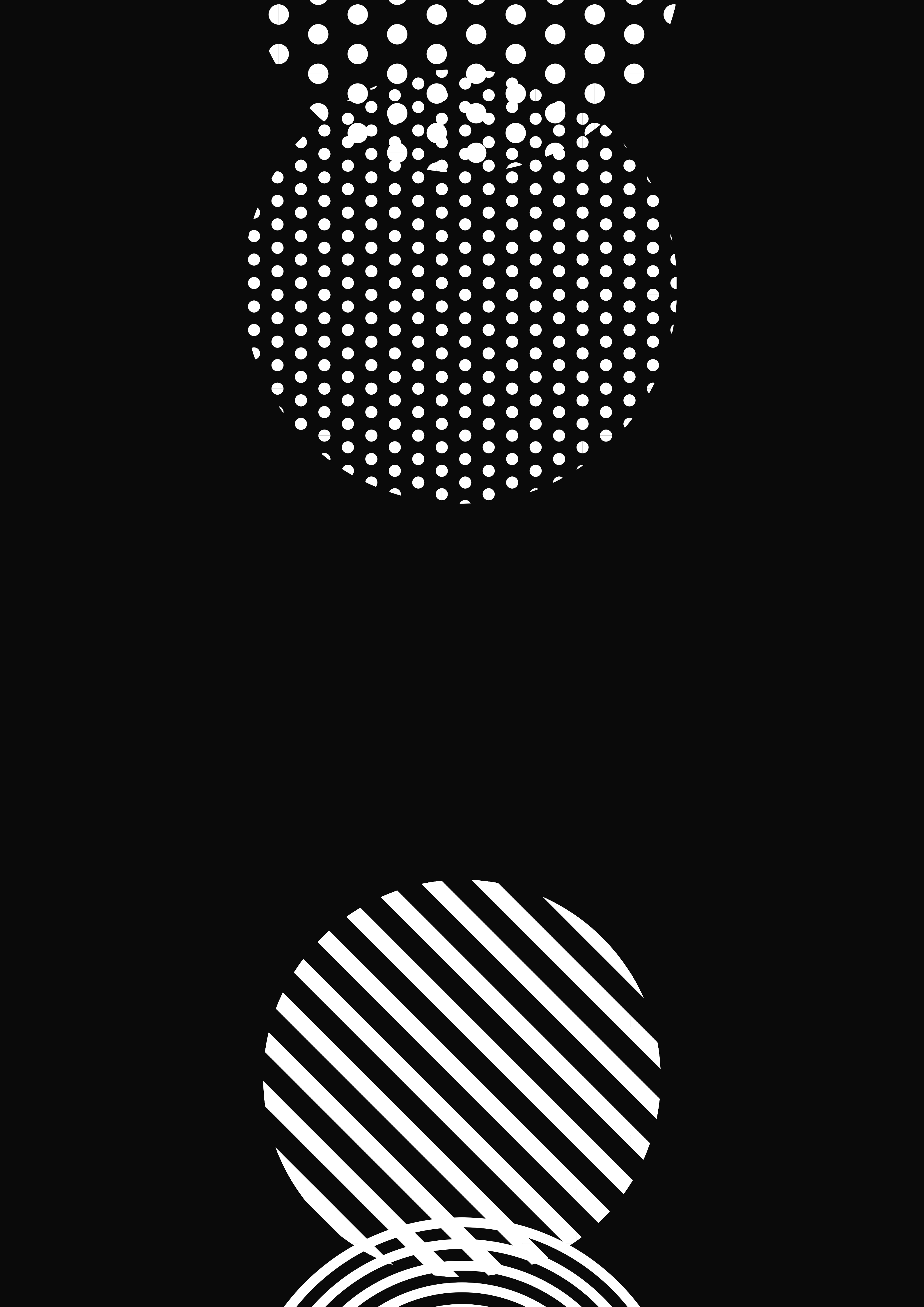

Exercice 1

1. f est polynomiale donc de classe C^1

2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -3y^2 + 2x$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 6xy$

Alors $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -3y^2+2x \\ 4y^3-6xy \end{pmatrix}$

3. $\vec{\nabla} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3y^2+2x=0 \\ 4y^3-6xy=0 \end{cases} \Rightarrow 2x = 3y^2$

$y(4y^2-6x)=0 \Rightarrow y=0$

$4y^2-6x=0$

$\Rightarrow 4y^2-9y^2=0$

$\Rightarrow -5y^2=0 \Rightarrow y=0$

alors $x=0$

Alors le seul point critique est $(0,0)$

4. $\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -6y \\ -6y & 12y-6x \end{pmatrix}$

$\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\det \mathcal{H}_f(0,0) = 0$ donc $(0,0)$ est un point critique dégénéré

5. $f(y^2,y) = y^4 - 3y^4 + y^4 = 2y^4 - 3y^4 = -y^4 \xrightarrow[y\to+\infty]{} -\infty$

$f(0,y) = y^4 \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$

Alors autour de 0 il y a une direction où f croît et dans l'autre décroît donc $(0,0)$ est un point sel.

Exercice 2

1. $S = g^{-1}(\{1\})$ g est continue car polynomiale
S est une preimage d'un fermé par une fonction continue alors S est fermé.

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} = 1$

$\Leftrightarrow 6x^2 + 3y^2 + z^2 = 12$ Or x^2, y^2, z^2 sont positive pour toute valeures entrantes donc $z^2 \leq 12 \iff |z| \leq \sqrt{12}$

$3y^2 \leq 12 \iff |y| \leq \sqrt{4}$

$6x^2 \leq 12 \iff |x| \leq \sqrt{2}$

et $x \mapsto x^2 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ donc toute valeur x, y, z est bornée donc S est bornée.

Or S est fermé et borné donc S est compact.

2. D'après le cours, toute fonction continue admet un maximum et un minimum globaux sur un ensemble compact. Or f est continue car polynomiale est S compact d'après [1] donc f admet bien un minimum et un maximum globaux sur S.

3. $\mathcal{L}(\lambda, f, g) = x + y + z - \lambda \frac{x^2}{2} - \lambda \frac{y^2}{4} - \lambda \frac{z^2}{6} - \lambda$

$$(E) \iff \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,z) = 1 - \lambda x \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,z) = 1 - \lambda \frac{y}{2} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x,y,z) = 1 - \lambda \frac{z}{3} \end{cases}$$

Si $x = 0$ ou $y = 0$ ou $z = 0$ alors $\vec{\nabla} \mathcal{L}(x,y,z) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Alors supposons qu'aucune des variable ne vaut 0.

Alors on a $(E) \iff \begin{cases} \lambda = \frac{1}{x} \\ \lambda = \frac{2}{y} \\ \lambda = \frac{3}{z} \end{cases} \iff \frac{1}{x} = \frac{2}{y} = \frac{3}{z}$

$\Rightarrow x = \frac{y}{2}$ $\quad \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \Rightarrow 3y = 2z$
$\Rightarrow y = \frac{2}{3}z$

$x = \frac{z}{3}$

$x = z \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{1}} = \frac{z}{3}$

Alors $\left(\frac{z}{3}, \frac{2}{3}z, z\right)$

$\frac{z^2}{18} + \frac{z^2}{9} + \frac{z^2}{6} = 1 \iff z^2 + 2z^2 + 3z^2 = 18$
$\iff 6z^2 = 18 \iff z^2 = 3 \iff \begin{cases} z = \sqrt{3} \\ z = -\sqrt{3} \end{cases}$

Alors il y a deux extrémas:

$A := \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}\right) =: B$

$f(A) \geq 0$ $\quad f(B) \leq 0$ donc A est un maximum de f sur S et B un minimum de f sur S

Exercice 3

1. Soit $t>0$, soient $K, L \in \mathbb{R}_+^*$

$$F(tK, tL) = \left(a(tK)^\gamma + (1-a)(tL)^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$
$$= \left(a t^\gamma K^\gamma + (1-a) t^\gamma L^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$
$$= \left(t^\gamma (a K^\gamma + (1-a) L^\gamma)\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$
$$= \left(t^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(a K^\gamma + (1-a) L^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$
$$= t \left(a K^\gamma + (1-a) L^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad \text{car } t>0$$
$$= t F(K, L) \quad \text{par def de } F$$

2. (a)

(b) $$\frac{\partial F}{\partial K}(K, L) = \frac{1}{\gamma}\left(a K^\gamma + (1-a) L^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}-1} a \gamma K^{\gamma-1}$$
$$= \frac{1}{\gamma}\left(a K^\gamma + L^\gamma - a L^\gamma\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} a \gamma K^{-(1-\gamma)}$$
$$= = \frac{1}{\gamma}\left(\left(a K^\gamma + L^\gamma - a L^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}} a^{\frac{1}{1-\gamma}} \gamma^{\frac{1}{1-\gamma}} K^{-1}\right)^{1-\gamma} \qquad a\left(a + (1-a)\frac{L}{K}^\gamma\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$
$$= \frac{1}{\gamma}\left(\left(a K^\gamma + L^\gamma - a L^\gamma\right) a^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \gamma^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} K^{-\gamma}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$
$$= \frac{1}{\gamma}\left(\left(a + K^{-\gamma} - a K^{-\gamma}\right) a^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \gamma^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = a\left(a + (1-a) K^{-\gamma}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$a>0$, $\gamma>0$, $1-a>0$, $K>0$ donc $\frac{\partial F}{\partial K}(K, L) > 0 \quad \forall K, L \in \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{\partial F}{\partial L}(K, L) = \frac{1}{\gamma}\left(a K^\gamma + (1-a) L^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}-1} (1-a)\gamma L^{\gamma-1}$$
$$= \frac{1}{\gamma}\left(a K^\gamma + (1-a) L^\gamma\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} (1-a)\gamma \left(L^{-1}\right)^{1-\gamma}$$
$$= \frac{1}{\gamma}\left(\left(a K^\gamma + (1-a) L^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}} (1-a)^{\frac{1}{1-\gamma}} \gamma^{\frac{1}{1-\gamma}} L^{-1}\right)^{1-\gamma}$$
$$= \frac{1}{\gamma}\left(\left(a K^\gamma + (1-a) L^\gamma\right) (1-a)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \gamma^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} L^{-\gamma}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$
$$= (1-a)\left(a K^\gamma + (1-a)\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$(1-a)>0$ $\quad a>0 \quad K>0$ donc $K^\gamma>0$

donc $aK^\gamma>0$ alors $aK^\gamma + (1-a) > 0$

donc $\frac{\partial F}{\partial L}(K, L) \geq 0 \quad \forall K, L \in \mathbb{R}_+^*$

(c) $\frac{\partial F}{\partial K}(K, L)$ croissante par rapport à L
décroissante par rapport à K

$\frac{\partial F}{\partial L}(K, L)$ croissante par rapport à K
décroissante par rapport à L

3] $T(K,L) = \dfrac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}} = \dfrac{(1-a)\left(aK^{\delta} + (1-a)\right)^{\frac{1-\delta}{\delta}}}{a\left(a + (1-a)K^{-\delta}\right)^{\frac{1-\delta}{\delta}}}$

$= \left(\dfrac{1-a}{a}\right)\left(\dfrac{aK^{\delta} + (1-a)}{a + (1-a)K^{-\delta}}\right)^{\frac{1-\delta}{\delta}}$

$\dfrac{aK^{\delta} + (1-a)}{a + (1-a)K^{-\delta}} \qquad \dfrac{K^{\delta}\cancel{(a + (1-a)K^{-\delta})}}{\cancel{a + (1-a)K^{-\delta}}} = K^{\delta}$

$= \dfrac{(1-a)}{a} K^{1-\delta}$

4] $\ln(T(K,L)) = \ln\left(\left(\dfrac{1-a}{a}\right)K^{1-\delta}\right) = \ln\left(\dfrac{1-a}{a}\right) + \ln(K^{1-\delta})$

$= \ln\left(\dfrac{1-a}{a}\right) + (1-\delta)\ln(K)$

Donc en posant $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1-a}{a}\right) + (1-\delta)x$

On a $\ln(T(K,L)) = f(\ln(K))$

5- car $\dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{1-\delta}$ qui est constant

6] $\dfrac{\partial F}{\partial L}(K,L) = (1-a)\left(aK^{\delta} + (1-a)\right)^{\frac{1-\delta}{\delta}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{K}\right)$

$\dfrac{\partial F}{\partial K}(K,L) = a\left(a + (1-a)K^{-\delta}\right)^{\frac{1-\delta}{\delta}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{K}}\right)$

7] $\dfrac{\partial P}{\partial K}(K,L) = p\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{K}}\right) - z$

$p\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{K}}\right) - z = 0$

$\iff p\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{K}}\right) = 2z$

$\iff 1 + \dfrac{1}{\sqrt{K}} = \dfrac{4z}{p}$

$\iff \dfrac{1}{\sqrt{K}} = \dfrac{4z}{p} - 1$

$\iff K = \left(\dfrac{4z}{p} - 1\right)^{-2}$

8. $\frac{\partial P}{\partial L}(K,L) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{K}\right) - w$

$$p\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{K}\right) - w = 0$$

$$\Leftrightarrow p\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{K}\right) = 2w$$

$$\Leftrightarrow p\left(1 + \sqrt{K}\right) = 4w$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{K} = \frac{4w}{p} - 1$$

$$\Leftrightarrow K = \left(\frac{4w}{p} - 1\right)^2$$

S'il existe un maximum alors il existe un point critique forcément i.e

$$\vec{\nabla} P(K,L) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial K} \\ \frac{\partial P}{\partial L} \end{pmatrix}(K,L) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K = \left(\frac{4z}{p} - 1\right)^{-2} \\ K = \left(\frac{4w}{p} - 1\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4z}{p} - 1\right)^{-2} = \left(\frac{4w}{p} - 1\right)^2$$

✓