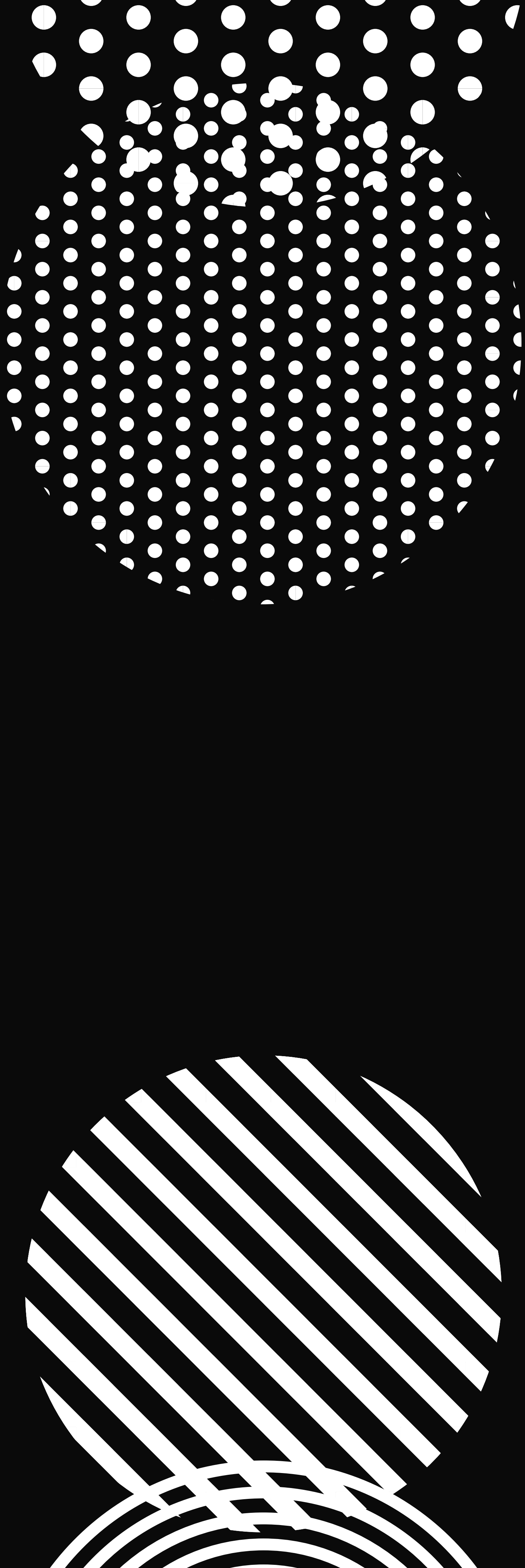


Exercice 1.2

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x+y)^2$$

$$\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+(x+y)^2 = 1\}$$

$$\mathcal{L}(f,g,\lambda_i) = (x-1)^2+(y-1)^2+(x+y)^2 - \lambda(x^2+y^2+(x+y)^2-1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y) = 0 \Rightarrow 2(x-1)+2(x+y)-2\lambda x - 2\lambda(x+y) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y) = 0 \Rightarrow 2(y-1)+2(x+y)-2\lambda y - 2\lambda(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$2(x-1)-2(y-1)-2\lambda x+2\lambda y = 0$$

$$\Rightarrow 2(x-1)-2(y-1)+2\lambda(y-x) = 0$$

$$\Rightarrow 2\lambda(x-y) = 2(y-1-x+1)$$

$$\Rightarrow \lambda(x-y) = y-x$$

$$\Rightarrow \lambda = -1$$

$$\begin{cases} 2(x-1)+2(x+y)+2x+2(x+y) = 0 \\ 2(y-1)+2(x+y)+2y+2(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x-2+4x+4y = 0 \\ 4y-2+4x+4y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{ 4x-4y = 0 \Rightarrow \underline{x = y}$$

$$x^2+x^2+(2x)^2 = 1 \iff 6x^2 = 1 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} = y$$

Alors $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ sont les points critiques

$$\mathcal{L} = D^2_x f - \lambda_i D^2_x g$$

$$D^2_x \mathcal{L}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y) = 0 \Rightarrow 2(x-1)+2(x+y)-2\lambda x - 2\lambda(x+y) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y) = 0 \Rightarrow 2(y-1)+2(x+y)-2\lambda y - 2\lambda(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$D^2_{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} 2+2-2\lambda-2\lambda & 2-2\lambda \\ 2-2\lambda & 2+2-2\lambda-2\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4-4\lambda & 2-2\lambda \\ 2-2\lambda & 4-4\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$\det D^2_{\tilde{x}} = 64-16 > 0$
$\mathrm{Tr}(D^2_{\tilde{x}}) > 0$

donc les 2 points critiques sont des minimums locaux.

$f(\sqrt{6}^{-1}, \sqrt{6}^{-1}) < f(-\sqrt{6}^{-1}, -\sqrt{6}^{-1})$ d'où $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ est un minimum de f sur $\mathcal{E}$.

2) (a) Soient $(x,y,z) \in \mathcal{C}$ donc

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow -z = x+y$$

mais $(-z)^2 = z^2$ donc

$x^2+y^2+(x+y)^2=1$ ce qui est la contraire de $\mathcal{E}$, d'où $(x,y) \in \mathcal{E}$

(b) Soient $(x,y) \in \mathcal{E}$ d'où $x^2+y^2+(x+y)^2=1$

On sait que $(x+y)^2 = (-x-y)^2$
Notons $z = -x-y$

D'où $x^2+y^2+(z)^2 = 1$
et $x+y+z = x+y-x-y = 0$

D'où $(x,y,z) = (x,y,-x-y) \in \mathcal{C}$

$$d(M,A) = d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\| \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}$$

$f(x,y) = F(x,y,-x-y)$ est une bijection entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$

alors il reste à minimiser f sur $\mathcal{E}$, d'après 1)

$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ est un minimum de f d'où

$M = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ est un point tel que la distance entre $\mathcal{C}$ et A est la plus petite possible.

Exercice 1.5

$f(x,y) = y \qquad g(x,y) = y^3 - x^2$

$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$

1. $\forall (x,y) \in E \qquad f(x,y) = y = x^{2\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}} \geq 0$

Donc $y = x^{\frac{2}{3}} = 0$ est le minimum globale de f sur E.

2)

$\mathcal{L}(f, g, \lambda) = y - \lambda(y^3 - x^2) = y - \lambda y^3 + \lambda x^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y) = 2\lambda x \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y) = 1 - 3\lambda y^2 \end{cases}$$

$$\vec{\nabla}\mathcal{L}(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2\lambda x = 0 \\ 1 - 3\lambda y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda x = 0 \\ 1 = 3\lambda y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda \cdot 0 = 0 \\ 1 = 3 \cdot \lambda \cdot 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ 1 = 0 \end{cases}$$

absurde, donc il n'existe pas de λ tq $\vec{\nabla} f(0,0) = \lambda \vec{\nabla} g(0,0)$

3) $\begin{cases} 2\lambda x = 0 \\ 1 = 3\lambda y^2 \end{cases}$

Si $x \neq 0$

d'où $2\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{0}{2x} = 0$

d'où $1 = 3 \cdot 0 \cdot y^2 \Rightarrow 1 = 0$

Donc il n'existe pas de points (x,y) tq $\vec{\nabla} f$ est colinéaire à $\vec{\nabla} g$ quand $x = 0$

Soit donc $x = 0$ et $y \neq 0$

D'où $\lambda = \frac{1}{3y^2}$ Donc il y a une infinité de points critiques dont le minimum globale ne fait pas partie.

Exercice 1.6

1. C est un cercle du rayon 4 donc C est bornée. De plus C est fermé car une préimage d'un fermé $]-\infty, 4]$ par une fonction continue. D'où C est un compacte.

2. D'après le théorème du cours toute fonction continue admet un minimum est un maximum globaux sur un ensemble compacte. Donc f admet bien un minimum et un maximum globale sur C.

3. (a) $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

(b) Cherchons les points critiques sur $\mathbb{R}^2$
donc on cherche (x,y) tq $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Alors $(0,0)$ est le seul point critique sur $\mathbb{R}^2$

$(0^2-1)^2 + 0^2 = 1^2 = 1 < 4$ donc $(0,0) \in C^\circ$

4) (a) $\partial C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2-1)^2 + y^2 - 4 = 0\}$
Notons $g(x,y) = (x^2-1)^2 + y^2 - 4$ d'où
$\partial C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$

(b)

$$\mathcal{L}(f,g,\lambda) = xy - \lambda\left((x^2-1)^2 + y^2 - 4\right)$$
$$= xy - \lambda x^4 + 2\lambda x^2 - \lambda - \lambda y^2 + 4\lambda$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y - 4\lambda x^3 + 4\lambda x \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x - 2\lambda y \end{cases}$$

$(x,y) \neq 0$

On cherche $\vec{\nabla} \mathcal{L}(x,y) = 0 \iff \begin{cases} y - 4\lambda x^3 + 4\lambda x = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} y = 4\lambda x(x^2-1) \\ x = 2\lambda y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{x}{2y}$$

$$\lambda = \frac{y}{4x(x^2-1)}$$

$$\iff \frac{x}{2y} = \frac{y}{4x(x^2-1)}$$

$$\iff \frac{x^2}{y^2} = \frac{1}{2(x^2-1)}$$

$$\iff 2(x^2-1) = \frac{y^2}{x^2}$$

$$\iff (x^2-1) = \frac{y^2}{2x^2}$$

(c) $2x^2(x^2-1) = y^2$

D'où $(x^2-1)^2 + 2x^2(x^2-1) = 4$

$\iff (x^2-1)(x^2-1+2x^2) = 4$

$\iff (x^2-1)(3x^2-1) = 4$

$\iff 3x^4 - 3x^2 - x^2 + 1 - 4 = 0$

$\iff 3x^4 - 4x^2 - 3 = 0$

Notons $z = x^2$ donc on a 12·3

$$3z^2 - 4z - 3 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) = 16 + 36 = 52$$

$$z_1 = \frac{4 + \sqrt{52}}{6} = x^2$$

$$z_2 = \frac{4 - \sqrt{52}}{6} = x^2$$

D'où $x_1 = \sqrt{\frac{4+\sqrt{52}}{6}}$ $\quad x_3 = \sqrt{\frac{4-\sqrt{52}}{6}}$

$x_2 = -\sqrt{\frac{4+\sqrt{52}}{6}}$ $\quad x_4 = -\sqrt{\frac{4-\sqrt{52}}{6}}$

Sont les points critiques de f sur $\mathbb{C}$

5) triviale.

Exercice 21

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) \leq 0 \quad$ et $\quad f(0,0) = 0$ donc

0 est le maximum de la fonction f.

2. $h_1(x,y) = 2x + y - 2$

$h_2(x,y) = -x$

$h_3(x,y) = -y$

$\vec{\nabla} h_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla} h_2(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla} h_3(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Cette famille n'est pas libre. Si on choisit 2 quelconques, alors ils sont libres.

Les 3 contraintes sont actives si $-x = -y = 0$ et $2x+y = 2$ Impossible. Alors tous les points sont qualifiés.

3. $\mathcal{L}(x,y,z) = \overbrace{-x^2 - y^2}^{= f(x,y)} + \lambda_1(2x + y - 2) + \lambda_2(-x) + \lambda_3(-y)$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} -2x - 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ -2y - \lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_1(2x + y - 2) = 0 \\ -\lambda_2 x = 0 \\ -\lambda_3 y = 0 \end{cases}$$

(1)

$\lambda_1 = 0 \quad \begin{cases} -2x + \lambda_2 = 0 \\ -2y + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 x = 0 \\ -\lambda_3 y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 2x = \lambda_2 \\ 2y = \lambda_3 \end{matrix}$

$\Rightarrow \quad -\lambda_2 \frac{\lambda_2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \lambda_2 = 0$

idem λ_3

i.e $\quad x = 0 = y$

(2) $\lambda_1 < 0$ donc $2x + y = 2$ $\quad \begin{cases} -2x - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2y - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 x = 0 \\ -\lambda_3 y = 0 \end{cases}$

2a) $\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 = 0$ $\begin{cases} -2x - 2\lambda_1 = 0 \\ -2y - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_3 y = 0 \end{cases}$

i) $\lambda_3 = 0$

donc $\begin{cases} -2x - 2\lambda_1 = 0 \\ -2y - \lambda_1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow -2x = 2\lambda_1$

$\Rightarrow -2y = \lambda_1$

$\Rightarrow -2x = -4y$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow x = \frac{4}{5}$

$f\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) = -\frac{16}{25} - \frac{4}{25}$

$= -\frac{20}{25} = -\frac{4}{5}$

ii) $\lambda_3 < 0$ donc $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ $\Rightarrow x = 1$

$f(1, 0) = -1$

2b) $\lambda_2 < 0$ donc $x = 0$

donc $y = 2$ donc $\lambda_3 = 0$ $\begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2y - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_3 y = 0 \end{cases}$

Alors $\begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -4 - \lambda_1 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \lambda_2 = -8$ $\Rightarrow \lambda_1 = -4$

$(0, 2)$ $f(0, 2) = -4$

Donc le minimum est $\underline{-4}$.

Exercice 2.2

$\beta \in \mathbb{R}$ $f(x, y) = 2x + \beta y$

$h_1(x, y) = x^2 + y^2 - 5$ $h_2(x, y) = x - y - 2$

$\vec{\nabla} h_1(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ $\vec{\nabla} h_2(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

1) Lorsque $y = -x$ $\vec{\nabla} h_1$ et $\vec{\nabla} h_2$ ne sont pas libres, dans l'autre cas ils sont libres.

Si $y = -x$. Libres si seulement une des deux contraintes est active. Vérifions les cas où les 2 contraintes sont actives.

i.e $x^2 + y^2 - 5 = 0$ et $x - y - 2 = 0$ $\Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1$

$\Rightarrow 1 + 1 - 5 = -3 = 0$ contradiction. Alors 2 contraintes ne peuvent pas être actives en même temps.

Donc les contraintes sont qualifiées en tout point.

$$\mathcal{L} = 2x + \beta y - \lambda_1 (x^2 + y^2 - 5) - \lambda_2 (x - y - 2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2 - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \beta - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 (x^2 + y^2 - 5) = 0 \\ \lambda_2 (x - y - 2) = 0 \end{cases}$$

① $\lambda_1 < 0$ donc $x^2 + y^2 - 5 = 0$ $\begin{cases} 2 - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0 \\ \beta - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ \lambda_2 (x - y - 2) = 0 \end{cases}$

a) $\lambda_2 < 0$ $x - y - 2 = 0$

$(y+2)^2 + y^2 - 5 = 0$

$y^2 + 4y + y^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow 2y^2 + 4y - 1 = 0$

$\mathcal{D} = 16 - 4 \cdot 2(-1) = 16 + 8 = 24$ $\quad y = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{2}$ $\quad x = \begin{cases} \frac{3 + \sqrt{6}}{2} \\ \frac{3 - \sqrt{6}}{2} \end{cases}$

$\cancel{\begin{cases} 2 - \lambda_1 (3 + \sqrt{6}) - \lambda_2 = 0 \\ \beta - \lambda_1 (-1 + \sqrt{6}) + \lambda_2 = 0 \end{cases}}$ $\cancel{2 + \beta - \lambda_1 (2 + \sqrt{6}) \Rightarrow 2 + \beta = \lambda_1 (2 + \sqrt{6})}$ $\cancel{\Rightarrow \frac{2 + \beta}{2 + \sqrt{6}} = \lambda_1}$

(b) $\lambda_2 = 0$ $\begin{cases} 2 - 2\lambda_1 x = 0 \\ \beta - 2\lambda_1 y = 0 \\ x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow y = \pm \sqrt{5 - x^2}$

Exercice 2.3

1. $h(x,y) = xy - 1$

$\vec{\nabla} h(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ qui est libre partout sauf en un point $(0,0)$

en $(0,0)$ $h(0,0) = -1 < 0$ donc la contrainte n'est pas active, d'où la contrainte est qualifiée en ce point aussi, donc sur $\mathbb{R}$

2. $\mathcal{L} = f - \lambda h$

$= x + y - \lambda xy + \lambda$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 1 - \lambda y = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 1 - \lambda x = 0 \\ \lambda (xy - 1) = 0 \end{cases}$$

① $\lambda < 0$ donc $xy = 1$ i.e $x \neq 0$ et $y \neq 0$
donc $y = \frac{1}{x}$

D'où $xy - \lambda y = 0 = xy - \lambda x$

$\Leftrightarrow y(x - \lambda) = x(y - \lambda) = 0$

D'où $1 - \lambda \frac{1}{x} = 1 - \lambda x = 0$

$\Leftrightarrow -\lambda \frac{1}{x} = -\lambda x \Leftrightarrow \lambda \frac{1}{x} = \lambda x \Leftrightarrow \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x = \pm 1$
et $y = \pm 1$

$1 - \lambda y = 0 \Rightarrow 1 = \lambda y$ donc si y positive, alors λ aussi, mais $\lambda < 0$ par hypothèse, donc $x = y = -1$ et $\lambda = -1$

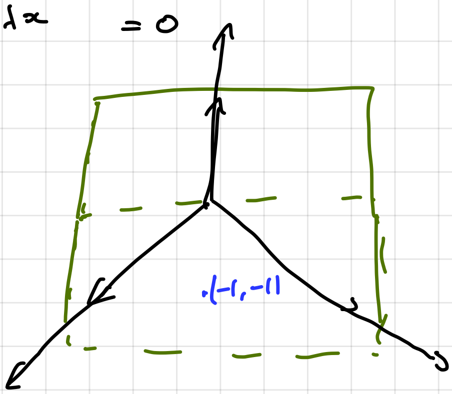
Donc $(-1,-1)$ est le point où les conditions KKT sont vérifiées.

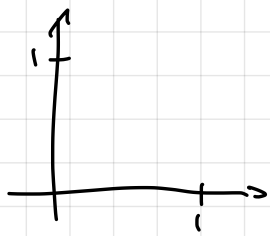
② $\lambda = 0$ donc $xy - 1 \leq 0$

$1 - \lambda y = 0 = 1$ ce qui impossible, donc $\lambda \neq 0$.

$1 - \lambda x = 0$

3.





$-3 \cdot -\frac{1}{9} = \frac{1}{3} \leq 1$

et $-3 - \frac{1}{9} < -2$

d'où $(-1,-1)$ n'est pas un minimum.

Exercice 2-4

1. $P(x,y) = x + 3y - C(x,y) = x+3y - 5x^2 - 5y^2 + 2xy + 2x + 1000$

$h_1(x,y) = x+y-20 \qquad f(x,y) = -P(x,y)$

$h_2(x,y) = -x-y$

$\mathcal{L} = P(x,y) - \lambda_1 h_1 - \lambda_2 h_2$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -3 + 10x - 2y + \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -3 + 10y - 2x + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 (x+y-20) = 0 \end{cases}$$

$10x - 2y = 10y - 2x \iff 12y = 12x \iff x = y$

(1) $\lambda_1 < 0$ donc $x+y = 20 \iff x = y = 10$

(2) $\lambda_1 = 0 \qquad x+y-20 \leq 0$

donc $x+y \leq 20$ i.e $2x \leq 20$
$\iff x \leq 10$

$8x \geq 3$
$x \geq \frac{3}{8}$

Donc $-P(x,y)$ est croissante pour $x \geq \frac{3}{8}$ donc $x = y = 10$ est un min.

$10 + 30 - 1000 + 200 + 20 + 1000 = \underline{260}$

(3) $h_1(x,y) = -x \qquad h_2(x,y) = -y \qquad h_3(x,y) = x+y-20$

Tous les 3 ne peuvent pas être qualifiés en même temps. Et 2 à 2 ils sont libres. Donc qualifiée

$\mathcal{L} = P(x,y) - \lambda_1 h_1 - \lambda_2 h_2$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -3 + 10x - 2y - \lambda_3 + \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -3 + 10y - 2x - \lambda_3 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 (x+y-20) = 0 \\ \lambda_1 (-x) = 0 \\ \lambda_2 (-y) = 0 \end{cases}$$

$10x - 2y = 10y - 2x \iff 12y = 12x \iff x = y$

① $\lambda_1 < 0$ donc $x = 0 = y$ donc

$-3 - \lambda_3 + \lambda_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda_3 + \lambda_1 = 3$ donc $\lambda_1 = \lambda_2$

$-3 - \lambda_3 + \lambda_2 = 0 \qquad -\lambda_3 + \lambda_2 = 3$

$P(0,0) = -1000$

② $\underline{\lambda_1 = 0}$ si $\lambda_2 < 0$ donc $y = 0 = x$ ↑ idem

donc

(a) $\lambda_2 = 0$ d'où $x \geq 0$ $y \geq 0$

i) $\lambda_3 < 0$ donc $x + y = 20$ $P(x,y) = 260$ d'après 2

ii) $\lambda_3 = 0$ donc min est à l'intérieur

$$\vec{\nabla} P(x,y) = \begin{pmatrix} -3 + 10x - 2y \\ -3 + 10y - 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \quad 8x = 3 \quad \Leftrightarrow x = y = \frac{3}{8}$

$P(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}) = \frac{3}{8} + \frac{9}{8} - 8 \cdot \frac{9}{64} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 1000 > 260$

Donc $(\frac{3}{8}, \frac{3}{8})$ est le max de P.

<u>Exercice 2.5</u>

1. $\mathcal{D} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4 \ \& \ y \geq 1 - \frac{x^2}{4}\}$

est fermé (définie par des inégalités larges) et bornée car $x^2 + y^2 \leq 4$ force $x \in [-2,2]$ et $y \in [-2,2]$ donc

$\mathcal{D}$ compact. f est continue car polynomiale donc admet un minimum global sur $\mathcal{D}$.

2. $h_1 = x^2 + y^2 - 4 \qquad h_2 = 1 - y - \frac{x^2}{4}$

$\vec{\nabla} h_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla} h_2 = \begin{pmatrix} -\frac{x}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \qquad -2x + yx = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x = yx \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $y = 2$

Si $x = 0$ et $y = 2$ $\vec{\nabla} h_1$ et $\vec{\nabla} h_2$ sont libres, donc qualifiées.

si $x=0 \Leftrightarrow y^2-4=1-y \Leftrightarrow y^2+y-5=0$

$\Delta = 1-4\cdot(-5) = 21$

$y_1 = \frac{-1+\sqrt{21}}{2} < 2$

$y_2 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2} > -3$

donc $h_1(0,2) < 2^2-4=0$

donc h_1 n'est pas active en y_1

$-y_2 < 3 \qquad y_2 < -\frac{5}{2}$

$-y_2 \in [\frac{5}{2},3]$

$h_1(0,y_2) > 0$ ce qui est impossible

donc h_1 qualifié en $x=0$

en $y=2 \quad h_1 = x^2 > 0$ ce qui est impossible, donc les contraintes sont qualifiées en tout point.

3. (a)

$\mathcal{L} = x(1+y^2) - \lambda_1(x^2+y^2-4) - \lambda_2(1-y-\frac{x^2}{4})$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 1+y^2 - 2\lambda_1 x + \lambda_2 \frac{x}{2} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2xy - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1(x^2+y^2-4) = 0 \\ \lambda_2(1-y-\frac{x^2}{4}) = 0 \end{cases}$$

(b) $x^2+y^2-4=0$ et $1-y-\frac{x^2}{4}=0$ donc $\lambda_1 \leq 0$ et $\lambda_2 \leq 0$

Donc $\begin{cases} x^2+y^2-4=0 \\ 1-y-\frac{x^2}{4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 4-y^2$

$\Leftrightarrow 1-y-\frac{4-y^2}{4} = 1-y-1+\frac{y^2}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{4} - y = 0 \Leftrightarrow y(\frac{y}{4}-1) = 0$

$\Leftrightarrow y=0$ ou $y=4$

Si $y=4$ donc $x^2+12=0$ impossible, donc $y \neq 4$ donc $y=0$

Si $y=0$ donc $x^2=4$ donc $x=\pm 2$

$$\begin{cases} 1+y^2 - 2\lambda_1 x + \lambda_2 \frac{x}{2} = 0 \\ 2xy - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2\lambda_1 x + \lambda_2 \frac{x}{2} = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

donc $1-2\lambda_1 x = 0$ i.e $1 = 2\lambda_1 x$

d'où $1 = -4\lambda_1 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{4}$ donc x doit être négative, i.e $x=-2$

et $\lambda_2 = 0$ et $y=0$ et $x=-2$

(c) 1 $x^2+y^2-4<0$ et $1-y-\frac{x^2}{4}=0$

donc $\lambda_1 = 0$

$$\begin{cases} 1+y^2 - 2\lambda_1 x + \lambda_2 \frac{x}{2} = 0 \\ 2xy - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+y^2+\lambda_2\frac{x}{2} = 0 \\ 2xy+\lambda_2 = 0 \\ 1-y-\frac{x^2}{4} = 0 \Leftrightarrow y = 1-\frac{x^2}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+(1-\frac{x^2}{4})^2 + \lambda_2\frac{x}{2} = 0 \\ 2x - \frac{x^3}{2} + \lambda_2 = 0 \iff \lambda_2 = \frac{x^3}{2} - 2x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$1+(1-\frac{x^2}{4})^2 + \frac{x^4}{4} - x^2 = 0$$

$$= 1+1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{16}+\frac{x^4}{4}-x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2 = 0 \qquad X = x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{16}X^2 - \frac{3}{2}X + 2 = 0$$

$$\Delta = \frac{9}{4} - \frac{5}{16}\cdot 2\cdot 4 = \frac{9}{4} - \frac{5}{2} = \frac{9}{4} - \frac{10}{4} = -\frac{1}{4}$$

donc il n'y a pas de solution de cet polynôme

2 $x^2+y^2-4=0$ et $1-y-\frac{x^2}{4}<0$

donc $\lambda_2 = 0$ et $x^2+y^2=4$

$$\frac{1+\frac{7}{3}}{2} = \frac{\frac{10}{3}}{2} = \frac{5}{3}$$

$$\begin{cases} 1+y^2 - 2\lambda_1 x = 0 \\ 2xy - 2\lambda_1 y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y(2x-2\lambda_1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{ou } x = \lambda_1 \end{cases}$$

cas 1 : $x = \lambda_1$: $1+y^2-2x^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1+y^2}{2} = x^2$ donc

$$\frac{1+y^2}{2} + y^2 = 4 \quad \text{donc} \quad 1+3y^2 = 8 \Leftrightarrow y^2 = \frac{7}{3}$$

$1-\frac{5}{3}-y = -\frac{2}{3}-y<0 \Leftrightarrow y>-\frac{2}{3}$

donc $x^2 = \frac{5}{3}$ i.e $x = -\sqrt{\frac{5}{3}} = \lambda_1$ donc $y = \sqrt{\frac{7}{3}}$

cas 2 : $y = 0$: $1 = 2\lambda_1 x$ donc $\lambda_1 \neq 0$ et $x \neq 0$

d'où $\lambda_1 = \frac{1}{2x}$; $x = \frac{1}{2\lambda_1}$ et $x^2 = 4$ donc $x = -2$

et $\lambda_1 = -\frac{1}{4}$

$(-2, 0)$

4. $f(-2, 0) = -2$

$f\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{7}{3}}\right) = -\sqrt{\frac{5}{3}}\left(1 + \sqrt{\frac{7}{3}}\right)$ donc le min de f atteint en $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{7}{3}}\right)$

Exercice 2-1

1. $\mathcal{D} = \{(x,y) : 2x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$ donc

$\mathcal{D}$ est fermé car définie par les contraintes larges et bornée car $x, y \geq 0$ et donc $x \leq 1$ et $y \leq 2$ donc $\mathcal{D}$ est compact.

Or f est de plus continue (étant polynomiale), donc f admet un minimum global sur $\mathcal{D}$ existe.

2. Définissons les contraintes :

$h_1(x,y) = 2x + y - 2$

$h_2(x,y) = -x$

$h_3(x,y) = -y$

$\vec{\nabla} h_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{\nabla} h_2(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{\nabla} h_3(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Les contraintes sont libres par paire, mais pas tous les 3 en même temps. Donc il suffit de montrer que tous les trois contraintes ne peuvent pas être actifs à la fois

Si $-x = 0$ et $-y = 0$ donc $(x,y) = (0,0)$

$h_1(0,0) = -2 \neq 0$ Donc tous les 3 contraintes ne peuvent pas être actives en même temps et donc toutes les contraintes sont qualifiées.

3. $\mathcal{L} = -x^2 - y^2 - \lambda_1(2x+y-2) + \lambda_2 x + \lambda_3 y$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -2x - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2y - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1(2x+y-2) = 0 \\ \lambda_2(-x) = 0 \\ \lambda_3(-y) = 0 \end{cases}$$

(2) $\lambda_1 = 0$ donc $2x+y-2 \leq 0$

$$\begin{cases} -2x + \lambda_2 = 0 \\ -2y + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 2x \\ \lambda_3 = 2y \end{cases} \quad \text{mais} \quad \begin{matrix} x \geq 0 \text{ et } \lambda_2 \leq 0 \\ y \geq 0 \text{ et } \lambda_3 \leq 0 \end{matrix}$$

$x = y = 0$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$

(1) $\lambda_1 < 0$ donc $2x+y-2 = 0$ i.e $2x+y = 2 \Leftrightarrow 2x = 2-y$

$$\begin{cases} -2x - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2y - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2+y-2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2y - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

(a) $\lambda_2 < 0$ donc $-x = 0$ donc $x = 0$ donc $y = 2$

(b) $\lambda_2 = 0$ donc $-x \leq 0$ i.e $x \geq 0$

$$\begin{cases} -2+y-2\lambda_1 = 0 \\ -2y - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{-2+y}{2} = -1 + \frac{y}{2}$$

i) $\lambda_3 = 0$ donc $-2+y-2\lambda_1 = -2y - \lambda_1 = 0$

$\Leftrightarrow 3y - 2 = \lambda_1$

$\Leftrightarrow 6y - 4 = -2 + y$

$\Leftrightarrow 5y = 2$

$\Leftrightarrow y = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = 1 - \frac{y}{2} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

$(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$

ii) $\lambda_3 < 0$ donc $y = 0$ et $x = 1$ $(1,0)$

Donc les extremas sonts

$(1,0)$, $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$, $(0,2)$, $(0,0)$

$f(1,0) = -1$ $\quad f(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}) = -\frac{16}{25} - \frac{4}{25} = -\frac{20}{25} = -\frac{4}{5}$

$f(0,2) = -4$ $\quad f(0,0) = 0$ Donc le min est -4 qui est atteint en $(0,2)$

Examen 2024

Exercice 1

$f(x,y) = x+y$

1.

(a) $h_1(x,y) = -xy+2$
$h_2(x,y) = 2x+y-5$

(b) $\vec{\nabla} h_1(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$ $\vec{\nabla} h_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix} -y & 2 \\ -x & 1 \end{pmatrix} = -y+2x$

$-y+2x = 0 \Leftrightarrow 2x = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{2}$

$h_2(\frac{y}{2}, y) = 2y-5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{25}{4}$

$h_1(\frac{y}{2}, y) = -\frac{y^2}{2}+2 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 = 4$ donc $y^2 \neq y^2$ absurde

donc lorsque $\vec{\nabla} h_1$ et $\vec{\nabla} h_2$ ne sont pas libres, l'une des contraintes n'est pas active donc en telles points les contraintes sont qualifiées. Lorsque $\vec{\nabla} h_1$ et $\vec{\nabla} h_2$ sont libres, les contraintes sont qualifiées. D'où les contraintes sont qualifiées en tout point de $\mathcal{D}$.

2.

(a) $\mathcal{L} = x+y - \lambda_1(-xy+2) - \lambda_2(y+2x-5)$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 1 + \lambda_1 y - 2\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 1 + \lambda_1 x - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1(-xy+2) = 0 \\ \lambda_2(y+2x-5) = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 y - \lambda_1 x - \lambda_2 = 0$

$\lambda_1(y-x) = \lambda_2$

1. Si $\lambda_1 \neq 0$ donc $xy = 2$
   i. Si $\lambda_2 = 0$ donc $y = x \Leftrightarrow xy = 2 = x^2$
   donc $x = y = \sqrt{2}$ ou $x = y = -\sqrt{2}$

   ii. Si $\lambda_2 \neq 0$ donc $y+2x-5 = 0$ donc $y = 5-2x$

donc $x(5-2x)=2$

$\Leftrightarrow -2x^2+5x-2=0$

$\mathcal{D} = 25-4\cdot(-2)(-2) = 25 - 4\cdot 4 = 25-16 = 9$

$x_1 = -\dfrac{-5+\sqrt{9}}{4} = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$x_2 = -\dfrac{-5-\sqrt{9}}{4} = \dfrac{5+3}{4} = \dfrac{8}{4} = 2$

$y = 5-2x \quad y_1 = 5-1=4 \quad y_2 = 5-4 = 1$

$(\frac{1}{2}, 4), \ (2, 1)$

2. Si $\lambda_1 = 0$

donc $1-2\lambda_2=0$ donc $1=2\lambda_2$

$1-\lambda_2=0$ $\quad 1=\lambda_2$

cas impossible.

Donc on trouve bien quatres solutions :
$(\frac{1}{2}, 4), (2, 1), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

3.(a) Soit $(x, y) \in \mathcal{D}_f$

$x \geq 0 \quad y \geq 0$ donc $0 \leq y \leq -2x+5$ comme $-2x \leq 0$

donc $-2x+5 \leq 5$

donc $y \in [0, 5]$

de plus $y-5 \leq -2x \Leftrightarrow 5-y \geq 2x \Leftrightarrow \frac{5-y}{2} \geq x \geq 0$

Or $-y \leq 0$ donc $\frac{5}{2} \geq \frac{5-y}{2} \geq x \geq 0$ donc $x \in [0, \frac{5}{2}]$

d'où $\mathcal{D}_f$ est borné.

~~(b) $x_n, y_n = -\frac{1}{n+2}, -(n+2)^2$ d'où $x_n y_n = n+2 \geq 2$~~

~~$-(n+2)^2 \leq 2\frac{1}{n+2}+5$~~

~~De plus $\|(x_n, y_n)\| = \sqrt{x_n^2+y_n^2} = \sqrt{(n+2)^4+\frac{1}{(n+2)^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$~~

~~mais~~

Soient x_n, y_n tq $\|(x_n, y_n)\| = \sqrt{x_n^2+y_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

donc $x_n^2 \longrightarrow +\infty$ ou $y_n^2 \longrightarrow +\infty$

$x_n y_n \geq 2$ donc x_n et y_n sont de même signe.

Si $x_n \longrightarrow +\infty$ $\quad y_n \leq -2x_n+5$ donc $y_n \longrightarrow -\infty$ impos.

si $x_n \longrightarrow -\infty$, y_n pour n grands prends des valeurs $]-\infty, 0[$

si $y_n \longrightarrow +\infty$, $x_n \longrightarrow -\infty$ imposs

si $y_n \longrightarrow -\infty$, x_n prends les valeurs $]-\infty, 0[$

donc $x_n \longrightarrow -\infty$ ou $y_n \longrightarrow -\infty$ les deux sont négatifs non nuls

De plus comme D_f est borné, donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$ $(x_n, y_n) \notin D$
comme x_n ou y_n converge vers $-\infty$ sans bornitude.

(c) $f(x_n, y_n) = x_n + y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$ car l'un des x_n, y_n tend vers $-\infty$ et l'autre est forcément négative.

(d) D'après le théorème du cours, si f est continue et $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = -\infty$ donc f admet un maximum global sur D.

On teste les valeurs obtenues dans 2B(.

on trouve que $f(\frac{1}{2}, 4) = 4 + \frac{1}{2} > f(1,2) = 3 > f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} > f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$

Donc le maximum est $4 + \frac{1}{2}$ atteint en $(\frac{1}{2}, 4)$.

4) On a montré une suite (x_n, y_n) dans D tq $f(x_n, y_n) \longrightarrow -\infty$

donc il n'existe pas $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in D$ tq $f(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq f(x, y)$ $\forall x, y \in D$

donc f n'admet pas de minimum global sur D.

5). ~~On les contraintes sont qualifiées en (2,1) et (2,1) est une solution KKT donc (2,1) est un extremum local de f sur D.~~

(2,1) est une solution KKT pour $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$ donc on a le système suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + \lambda_1 y - 2\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + \lambda_1 x - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 1 + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

donc $\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2\lambda_1 - \lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\lambda_2$

donc d_1, d_2 sont de signes différentes, donc $(2,1)$ n'est pas un extremum local.

Examen 2023

Exercice 1.

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = x^2y^2\,(x^2+y^2)^{-1}$$

1. Soit $(x,y) \in \mathcal{U}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2\,(x^2+y^2)^{-1} + (-1)2x\,(x^2+y^2)^{-2}\,x^2y^2$$

$$= \frac{2xy^2}{x^2+y^2}\left(1 - (x^2+y^2)^{-1}x^2\right)$$

$$= \frac{2xy^2(x^2+y^2) - 2x\,x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2x^3y^2 + 2xy^4 - 2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{par symmetrie}$$

d'où $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} 2xy^4 \\ 2yx^4 \end{pmatrix}$

2. a) $\forall (x,y) \quad x^2y^2 \geq 0$ et $x^2+y^2 \geq 0$

d'où $0 \leq f(x,y)$

pour $x=0$ et $y \neq 0$ $f(x,y) = 0$ donc 0 est un minimum global de f.

b) $\vec{\nabla} f(x,y) = 0 \iff \begin{pmatrix} 2xy^4 \\ 2yx^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ car $\frac{1}{(x^2+y^2)^2} \neq 0 \;\forall (x,y)$.

$\iff x=0$ ou $y=0$

c) Posons $(x_n, y_n) = (n,n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ une suite

$f(x_n, y_n) = \frac{n^2 \cdot n^2}{n^2+n^2} = \frac{1}{2}n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc f n'est pas borné et donc ne possède pas un maximum global.

3 a) La fonction f est de classe C^1 sur U, idem

$g_1(x,y) = x^4+y^4-2$ car polynomiale, de plus

$\vec{\nabla} g_1(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 4y^3 \end{pmatrix}$ est libre sur U car jamais nul.

donc la méthode des multiplicateurs de Lagrange s'applique.

b) $\mathcal{L}_1 = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} - \mu_1(x^4+y^4-2)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial x} = \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} - \mu_1(4x^3) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \dfrac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2} - \mu_1(4y^3) = 0 \\ x^4+y^4 = 2 \end{cases}$$

$(x^2+y^2)^2 = x^4+2x^2y^2+y^4$

$$\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} - \mu_1(4x^3) = \frac{2xy^4}{x^4+2x^2y^2+y^4} - \mu_1(4x^3) = \frac{2xy^4}{2x^2y^2+2} - \mu_1(4x^3)$$

$$\frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2} - \mu_1(4y^3) = \frac{2yx^4}{x^4+2x^2y^2+y^4} - \mu_1(4y^3) = \frac{2yx^4}{2x^2y^2+2} - \mu_1(4y^3)$$

$$\begin{cases} \dfrac{2xy^4}{2x^2y^2+2} - \mu_1(4x^3) = 0 \\ \dfrac{2yx^4}{2x^2y^2+2} - \mu_1(4y^3) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{2xy^4}{2x^2y^2+2} - \mu_1(4x^3) = \frac{2yx^4}{2x^2y^2+2} - \mu_1(4y^3)$$

$$4\mu_1(x^3-y^3) = \frac{2xy^4-2yx^4}{2x^2y^2+2} = \frac{xy^4-yx^4}{x^2y^2+1}$$

Supposons que $x \neq 0$ et $y \neq 0$ donc

$$\frac{\frac{y^4}{x^2}}{2(2x^2y^2+2)} = \mu_1 = \frac{\frac{x^4}{y^2}}{2(2x^2y^2+2)} \iff \frac{y^4}{x^2} = \frac{x^4}{y^2} \iff y^6 = x^6$$

$y^{\frac{1}{3}} = y^2 = x^2 \qquad 2x^2 = 2 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$

$y = \pm 1$

donc les points critiques sont : $(-1,1), (1,-1), (-1,-1), (1,1), (0, 2^{\frac{1}{4}}), (0,-2^{\frac{1}{4}}), (2^{\frac{1}{4}},0), (-2^{\frac{1}{4}},0)$

c) On voit bien que les signes de x et y n'ont pas d'importance, donc

$f(1,1) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \qquad f(0, 2^{\frac{1}{4}}) = 0$

donc $\frac{1}{2}$ est un max de f sur E et 0 est un min de f sur E.

4. (a) $h_1(x,y) = -xy + 1$

$\vec{\nabla} h_1(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$ pour $x,y \in \mathbb{R}$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}$ $\vec{\nabla} h_1(x,y) \neq (0,0)$ donc $\vec{\nabla} h_1$ est libre $\forall x,y \in \mathbb{R}$ donc cette contrainte est qualifiée en tout point.

(b) h_1, f étants de classe C^1 et $\vec{\nabla} h_1$ libre le théorème KKT s'applique.

$$\mathcal{L} = \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2} - \lambda(-xy+1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} + \lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \dfrac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2} + \lambda x = 0 \\ \lambda(-xy+1) = 0 \end{cases}$$

① $\lambda < 0$ donc $xy = 1$ donc $x \neq 0$ et $y \neq 0$

donc $y = \frac{1}{x}$

$$\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} + \lambda y = \frac{2(xy)y^3}{(x^2+y^2)^2} + \lambda y = -\frac{2y^3}{(x^2+y^2)^2} + \lambda y = 0$$

$$\frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2} + \lambda x = \frac{2(xy)x^3}{(x^2+y^2)^2} + \lambda x = -\frac{2x^3}{(x^2+y^2)^2} + \lambda x = 0$$

$$y\left(\lambda - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = 0 = x\left(\lambda - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$$ car sont de même signe.

② $\lambda = 0$ donc $2xy^4 = 2yx^4 \Leftrightarrow x = y$

(c) si $x = y$ donc $f(x,y) = \frac{x^4}{2x^2} = \frac{x^2}{2}$ donc $h(x,y) = -x^2 + 1$