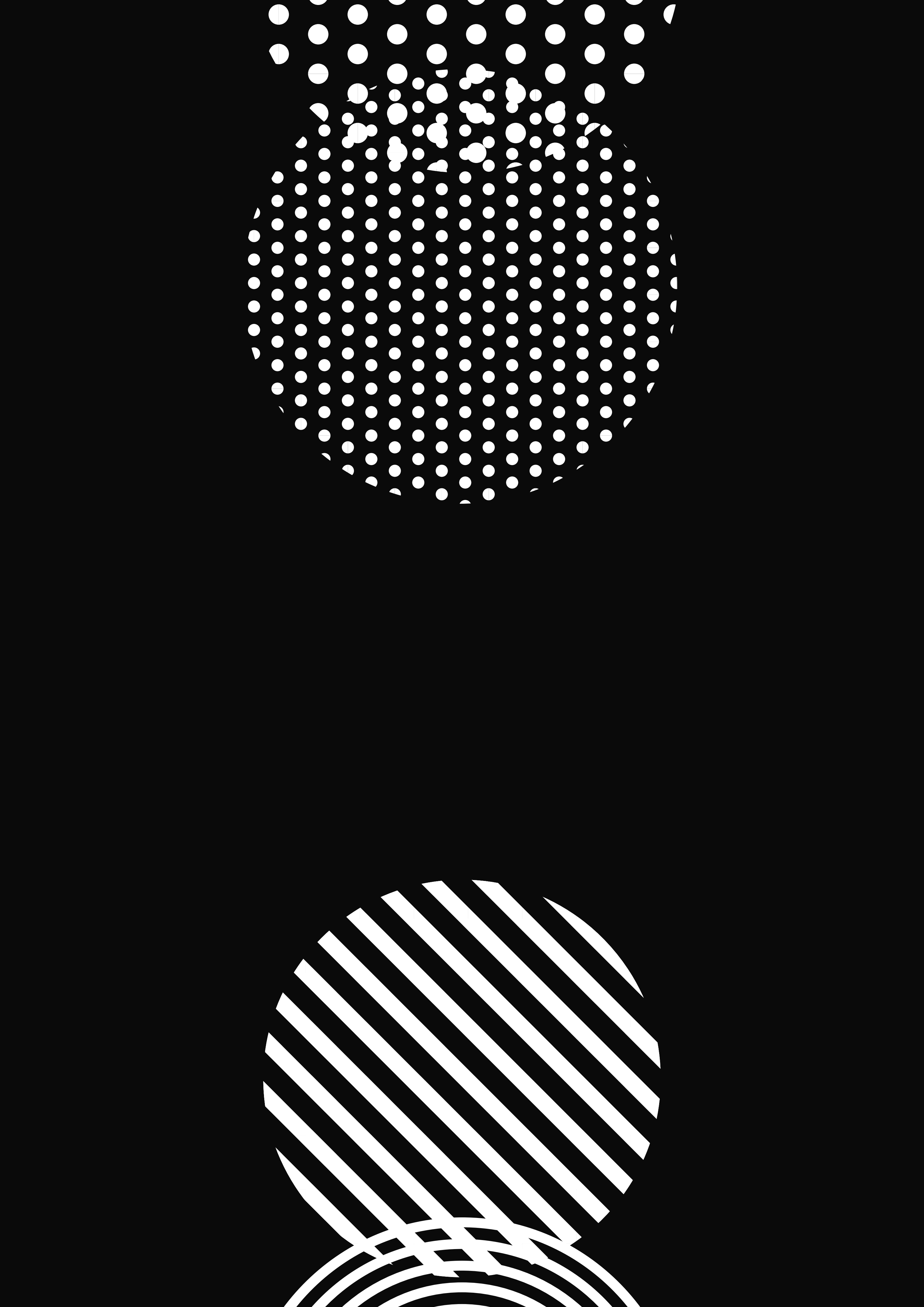


Exercice 3.1

$f(x,y) = 16000x + 10000y$

$h_1(x,y) = x+y \leq 600$
$h_2(x,y) = 2x+y \leq 400$

$\mathcal{L} = f(x,y) - \lambda_1 h_1(x,y) - \lambda_2 h_2(x,y)$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

1. Comme le problème est linéaire, alors le théorème de solutions sommet s'applique et donc la solution est sur un des sommets.

$\begin{cases} x+y = 400 \\ 2x+y = 600 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 200 \\ x = 200 \end{cases}$ max $= f(200,200) = 5200000$

2. $\begin{cases} x+y = 400 \\ 2x+y = 700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 100 \\ x = 300 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y = 400 \\ 2x+y = 900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -100 \\ x = 500 \end{cases}$

4. $g(u,v) = 400u + 600v$

$h_1(u,v) = -(u+v) + 10000$
$h_2(u,v) = -(u+2v) + 16000$

$\mathcal{L}^* = g(u,v) - \mu_1(-(u+v) + 10000) - \mu_2(-(u+2v) + 16000)$

$= 400u + 600v - \mu_1(-(u+v) + 10000) - \mu_2(-(u+2v) + 16000)$

primal $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} \sup\limits_{\lambda\mu} \mathcal{L}(x,\lambda,\mu)$ dual $\sup\limits_{\lambda\mu} \inf\limits_{x \in \mathbb{R}} \mathcal{L}(x,\lambda,\mu)$

$\mathcal{L}^*_d = -10000\mu_1 - 16000\mu_2 + 400u + 600v + \mu_1(u+v) + \mu_2(u+2v)$

$= -10000\mu_1 - 16000\mu_2 + u(400 + \mu_1 + \mu_2) + v(600 + \mu_1 + 2\mu_2)$

$= 10000\mu_1' + 16000\mu_2' + v(600 - \mu_1' - 2\mu_2') + u(400 - \mu_1' - \mu_2')$

avec $\mu_1' = -\mu_1$ $\mu_2' = -\mu_2$ donc $\mu_1', \mu_2' > 0$
$v = \lambda_1$, $u = \lambda_2$, $x = \mu_1'$, $y = \mu_2'$

$\mathcal{L} = 16000x + 10000y - \lambda_1(x+y-600)$
$- \lambda_2(2x+y-400)$

$= 16000x + 10000y + \lambda_1(600 - x - y)$
$+ \lambda_2(400 - 2x - y)$

c] D'après la dualité de Lagrange du problème linéaire, la solution du problème dual correspond à la solution du problème primal, donc, il suffit de trouver la solution du dual dont le problème est équivalent au problème de 1] dont la solution est

$\mu_1' = 200 \qquad \mu_2' = 200$ et

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 16000 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 & \Leftrightarrow -6000 + \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = 6000 = u \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 10000 - \lambda_1 - \lambda_1 = 0 & \Leftrightarrow \lambda_1 = 4000 = v \\ \lambda_1(600 - x - y) = 0 \\ \lambda_2(400 - 2x - y) = 0 \end{cases}$$

sol du problème primale de 4a

Exercice 3.3.

1. $f(x,y) = 800x + 100y$

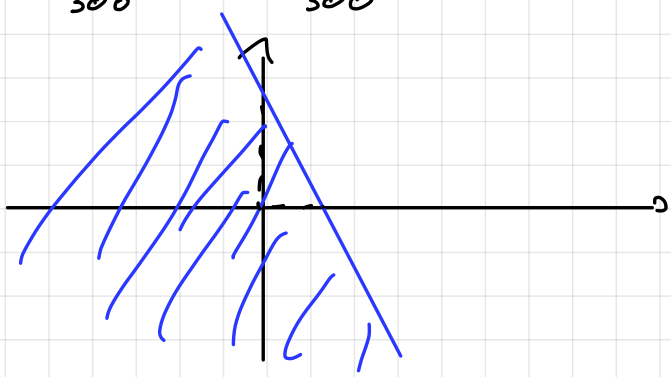
$h_1(x,y) = 2000x + 300y - 100000 \leq 0$

$L = 800x + 100y - \lambda(2000x + 300y - 100000)$

avec $\lambda \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 800 - 2000\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 100 - 300\lambda = 0 \\ \lambda(2000x + 300y - 100000) = 0 \end{cases}$$

2. $y = \frac{-2000}{300}x + \frac{10000}{300}$



3. Comme $x, y \geq 0$ car il n'est pas possible d'acheter un nombre négative, on a un ensemble de points compact, de plus f est linéaire donc continue, d'où le maximum existe et est atteint.

4. On introduit deux contraintes supplémentaires $h_2(x,y) = -x$
$h_3(x,y) = -y$.

Or le problème est linéaire et les contraintes aussi, donc le théorème de la solution-sommet s'applique et le maximum est sur un sommet.

Regardons les sommets:

$\begin{cases} h_2(x,y) = 0 \\ h_3(x,y) = 0 \end{cases} \iff x = 0 = y \qquad f(0,0) = 0$

$\begin{cases} h_1(x,y) = 0 \\ h_2(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2000x + 300y = 100000 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{100000}{300} = \frac{1000}{3} \\ x = 0 \end{cases}$

$f(0, \frac{1000}{3}) = \frac{100000}{3}$

$\begin{cases} h_1(x,y) = 0 \\ h_3(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{100000}{2000} = 50 \end{cases} \qquad f(50,0) = 40000$

Donc $f(50,0) > f(0, \frac{1000}{3}) > f(0,0)$

Le max est 40000 atteint sur $(50,0)$.

Exercice 3.2

$f(x,y) = 80000x + 20000y$

$h_1(x,y) = x - 12$
$h_2(x,y) = y - 9$
$h_3(x,y) = 1600 - 200x - 100y$
$h_4(x,y) = 30 - 6x - 6y$
$h_5(x,y) = -x$
$h_6(x,y) = -y$

2. Si on aurait $x = 0$ donc on aurait y au plus 9 d'où
$h_3(0,9) = 1600 - 900 > 0$ contradiction donc $y > 0$

Si on aurait $y = 0$ donc x au plus 12 d'où

$h_4(12,0) = 30 - 72 > 0$ contradiction. donc $y > 0$, d'où

h_5 et h_6 sont inactives.

3. $\begin{pmatrix} -200 & -100 \\ -6 & -6 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = H$

Donc on cherche un vecteur $\mu \in \mathbb{R}^4_-$ tq

$= \begin{pmatrix} 80000 \\ 2000 \end{pmatrix} = H^t \mu$

3. Si $x \neq 12$ et $y \neq 9$ donc les 2 dernière contraintes sont inactive, donc il nous reste à résoudre

$$\begin{pmatrix} 80000 \\ 20000 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -200 & -6 \\ -100 & -6 \end{pmatrix}}_{= H^{t}} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

La matrice H^t est inversible. $\det H^t = 1200 - 600 = 600$

donc $(H^t)^{-1} = \frac{1}{600} \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 100 & -200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80000 \\ 20000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

donc $\mu_2 > 0$ contradiction car on a supposé que $\mu_i < 0$.

Donc, il n'y a pas de solution lorsque $x \neq 12$ et $y \neq 9$

5. Si $x = 12$. donc la contrainte h_1 est active et h_3 est active,

donc on s'intéresse à

$$\begin{cases} h_2(x,y) = y - 9 \\ h_4(x,y) = 90 - 6x - 6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 9 \\ 18 - 6y \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 9 \\ 18 \leq 6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 9 \\ 3 \leq y \end{cases}$$

donc $g(y) := f(12,y) = 80000 \cdot 12 + 20000y$ est croissante en y, donc la solution optimale est $y = 3$.

Si $y = 9$

$$\begin{cases} x \leq 12 \\ 90 - 6x - 6y \leq 0 \\ 1600 - 200x - 100y \leq 0 \end{cases} \quad y = 9 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 12 \\ 36 - 6x \leq 0 \\ 700 - 200x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 12 \\ x \geq 6 \\ x \geq \frac{7}{2} \end{cases}$$

donc optimum est $(6,9)$

$f(12,3) = 80000 \cdot 12 + 20000 \cdot 3 = 960000 + 60000 = 1120000$

$f(6,9) = 80000 \cdot 6 + 20000 \cdot 9 = 480000 + 180000 = 660000$

d'où le min est atteint en $(6,9)$.