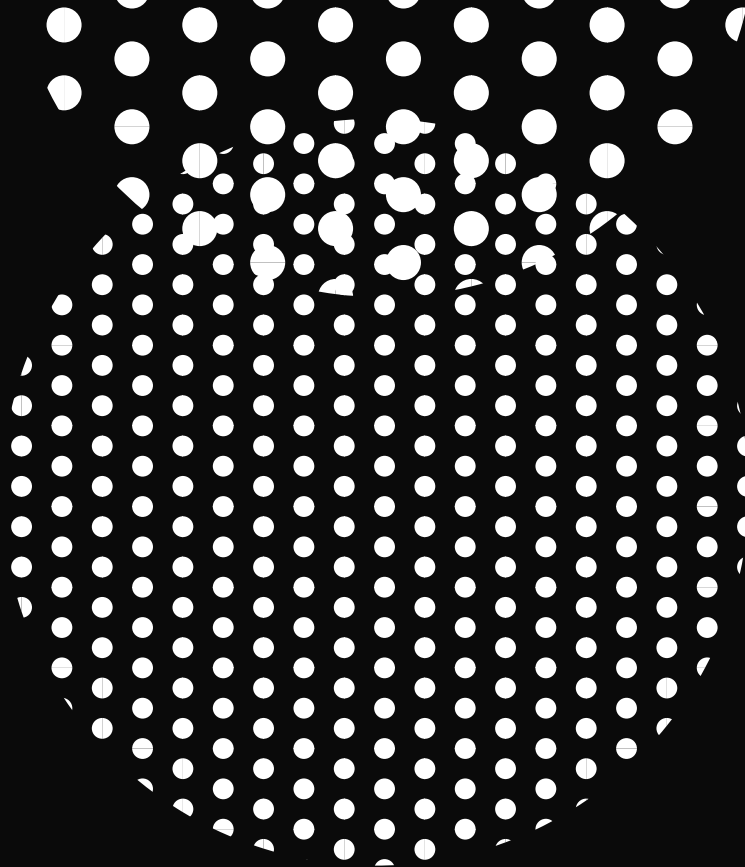




Exercice 1.3

$\Rightarrow$ Supposons que $F \subset \mathbb{R}^n$ est fermé.

Donc F^c est ouvert.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F

$$\text{tq } x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in \mathbb{R}^n$$

Montrons que $x \in F$

Supposons par l'absurde que $x \notin F$, donc $x \in F^c$

Or F^c est ouvert, $\exists \varepsilon > 0$ tq $B(x, \varepsilon) \subset F^c$

Par hypothèse, x_n converge vers x , donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \|x_n - x\| < \varepsilon$$

Prendons $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ donc $\exists N' \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

donc $x_n \in B(x, \varepsilon) \cap F = \emptyset$, i.e. $x_n \notin F$ contradiction.

Donc $x \in F$ forcément.

$\Leftarrow$ Soit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F
et qui converge vers $x \in \mathbb{R}^n$ supposons que
toute suite d'éléments de F converge vers un
élément de F , donc $x \in F$.

Supposons par l'absurde que F n'est pas
fermé i.e. F^c n'est pas ouvert.

Donc $\exists x_0 \in F^c$ tq $\forall \varepsilon > 0 \quad B(x_0, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$
 $B(x_0, \varepsilon) \cap F^c \neq \emptyset$

Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite tq $\forall \varepsilon > 0$
 $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N \quad x_n \in B(x_0, \varepsilon) \cap F$.

Donc $\|x_n - x_0\| \longrightarrow 0$ d'où x_n converge vers
 $x_0 \notin F$ contradiction. Donc F^c est ouvert et
donc F est fermé.

Exercice 1.4

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus A^\circ$ donc on a 2 cas

$$\frac{x \in \mathbb{R}^n \setminus A}{\text{or}} \quad \text{ou} \quad x \in A \setminus A^\circ$$

2. Soit $x \in \partial A$ donc $x \in \bar{A} \setminus A^\circ$ donc $x \in \bar{A}$
alors $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ distinct de x tq $\forall \varepsilon > 0$
 $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \quad x_n \in B(x, \varepsilon)$ donc $\forall \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$\partial A = \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \cap \bar{A}$ donc $x \in \partial A \Rightarrow x \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$ par le raisonnement symétrique $\forall \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$

D'où $\partial A = \{ \dots \}$

$$\text{2)} \quad \partial A = \bar{A} \setminus A^\circ = \mathbb{R}^n \setminus A^\circ \cap \bar{A} = \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \cap \bar{A}$$

$$\begin{aligned} \partial(\mathbb{R}^n \setminus A) &= \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ \\ &= \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A))} = \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \cap \bar{A} \end{aligned}$$

4) D'après 2) si $x \in \partial A$ donc $\forall \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

Donc $\forall x \in \partial A$ on prend (x_n)

($\Rightarrow$) S: $\partial A \subset A$ donc $\bar{A} \setminus A^\circ \subset A$ d'où $\bar{A} \subset A$ or $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A i.e. $A \subset \bar{A}$ donc

$\bar{A} = A$ et donc A est fermé.
Donc $\partial A \subset A \Rightarrow A$ fermé.

($\Leftarrow$) Supposons que A est fermé. Or $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A et A est le plus petit ensemble contenant A donc $\bar{A} = A$ donc $\bar{A} \setminus A^\circ \subset A$

5) $\Rightarrow$ Supposons A est ouvert donc A

Exercice 1.5

1. caractériser séquentielle les fermés

2. Soit $x \in \mathcal{D}'$ donc $h_1(x) < 0, \dots, h_p(x) < 0$

$$\text{Posons } h^- := -\min_{1 \leq i \leq p} \{h_i(x)\} \quad h^+ := -\max_{1 \leq i \leq p} \{h_i(x)\}$$

$$h = \min \{h^-, h^+\}$$

Par la continuité des h_i $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0$

$$\text{tq } y \in \mathcal{B}(x, \eta) \Rightarrow \|h_i(x) - h_i(y)\| < \varepsilon$$

$$\text{prenons } \varepsilon = \frac{h}{2} \quad \text{donc } \exists \eta > 0 \text{ tq}$$

$$\forall y \in \mathcal{B}(x, \eta) \quad \|h_i(x) - h_i(y)\| < \frac{h}{2}$$

$$h_i(x) - h_i(y) > 0$$

$$h_i(x) - h_i(y) < 0 \quad h_i(x) < h_i(y) \\ h^- > -h_i(x) > -h_i(y)$$

$$-h^+ > h_i(x) > h_i(y) \quad \text{donc } h_i(y) < 0 \quad \forall i$$

$$-h_i(x) < -h_i(y)$$

en prenant $\eta' := \min \{\eta\}$ on a $\mathcal{D}'$ ouvert.

$$3] \quad \mathcal{D} \subset \mathcal{U} \subset \bar{\mathcal{U}}$$

$$\mathcal{D}' \subset \mathcal{U}^\circ \subset \mathcal{U}$$

$$\partial \mathcal{U} = \bar{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}^\circ$$

Exercice 2.2

$$\underline{i \Rightarrow iii} \quad \text{tq } \forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x, y \quad \|x - y\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

F fermé. Soit suite dans $f^{-1}(F)$ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

tq $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in \mathbb{R}^n$

$(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$
par la continuité de f .

Or F fermé donc $f(x) \in F$ donc
 $x \in f^{-1}(F)$ d'où $f^{-1}(F)$ fermé.

$\underline{i \Rightarrow ii}$ par iii et $\mathcal{U}$ ouvert $\mathcal{U}^c$ est fermé

et $f^{-1}(\mathcal{U}^c)$ fermé donc $f^{-1}(\mathcal{U})$ ouvert.

