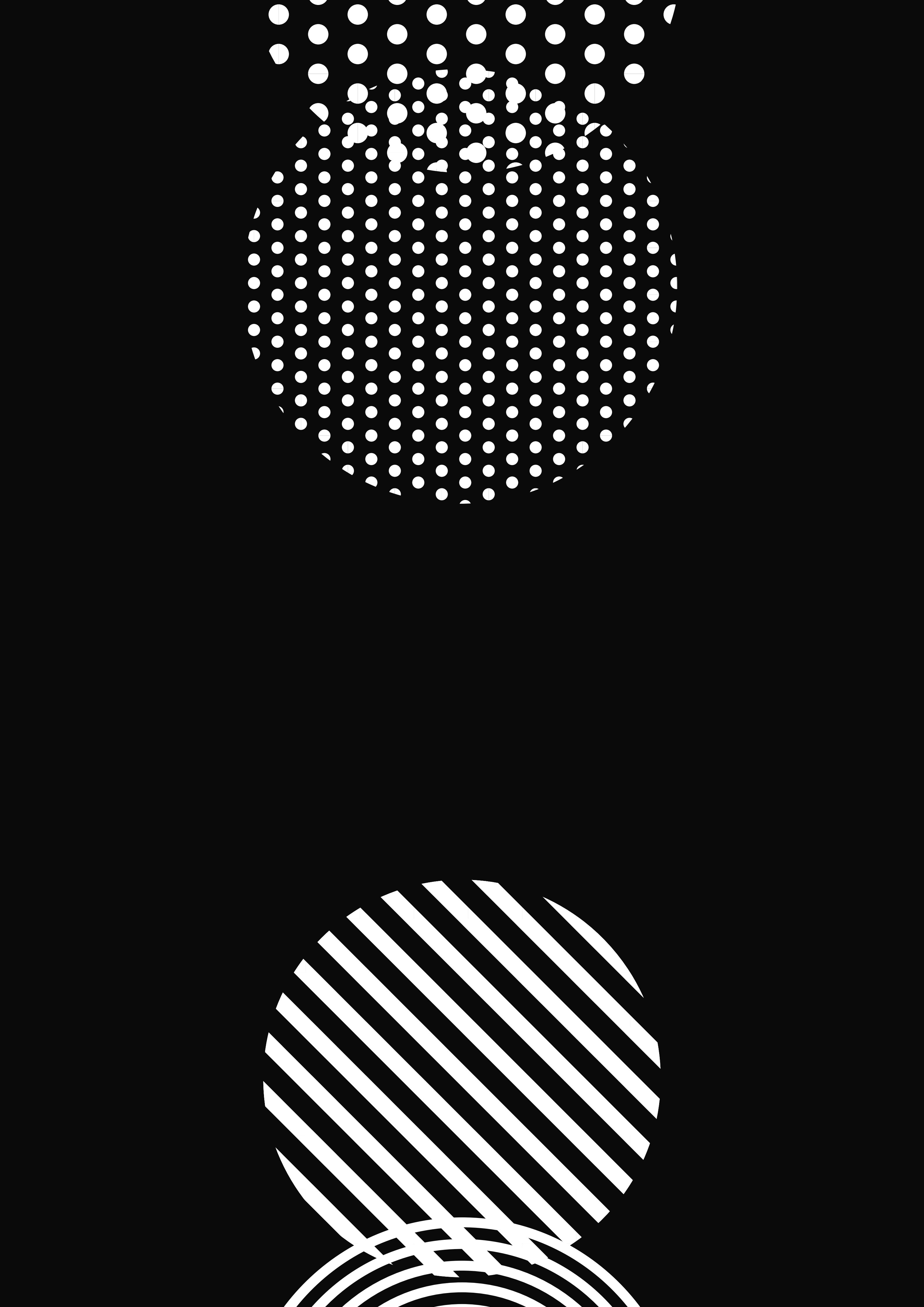

Exercice 2-1

$a \in \mathbb{R}$

$f_a(x,y) = x^2 + y^2 - axy - 2x - 2y$

1. $\vec{\nabla} f_a(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - ay - 2 \\ 2y - ax - 2 \end{pmatrix}$

$\mathcal{H}_{f_a}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -a & 2 \end{pmatrix}$

$\det \mathcal{H}_{f_a}(x,y) = 4 - a^2$ $\quad 4 - a^2 > 0 \iff 4 > a^2 \iff |a| < 2$

$\mathrm{Tr}\, \mathcal{H}_{f_a}(x,y) = 4$

pour $|a| < 2$ f_a est convexe.

3. Soit $a \in]-2,2[$.

$\lim\limits_{\substack{|x| \to +\infty \\ |y| \to +\infty}} f_a(x,y) = +\infty$ car x^2 crois plus vite que $2x$ crois ou décroit

idem avec y

Donc or f est de plus continue alors f_a possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$

Pour le trouver on regarde les point où la gradient de f_a s'annule

$\vec{\nabla} f_a(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - ay - 2 \\ 2y - ax - 2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 2x - ay - 2 = 0 \\ 2y - ax - 2 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2x - ay = 2 \\ 2y - ax = 2 \end{cases} \iff 4x - 2ay = 2 \iff$

$\iff 4x - a(2 + ax) - 2 = 0$

$\iff 4x - ax = 2 + a$

$\iff x = \frac{2+a}{4-a}$

$\iff y = \frac{2 - ax}{2} \iff \dfrac{2 - a\left(\frac{2+a}{4-a}\right)}{2}$

$\iff 1 - \frac{a}{2}\left(\frac{2+a}{4-a}\right)$

4. Supposons que $|a| > 2$

(a) $$H_{f_a}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x-ay\\-ax+2y\end{pmatrix}$$

$$\langle H_{f_a}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\rangle = \langle\begin{pmatrix}2x-ay\\-ax+2y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\rangle$$

$$= 2x^2 - ayx - ayx + 2y^2$$

$$= 2x^2 - 2ayx + 2y^2$$

$$f_a(x,y) - \frac{1}{2}\langle H_{f_a}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\rangle = x^2 + y^2 - axy - 2x - 2y$$

$$= -2x - 2y$$

(b) D'après (a)

$$f_a(x,y) = \frac{1}{2}\langle H_{f_a}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\rangle \quad -2x-2y$$

Or le déterminant de H_{f_a} est négative donc cette matrice admet une valeur propre strictement négative, notons la λ.
Soit $v = (x_0, v_0)$ un vecteur propre associé à λ.
Soit t ...

$$f_a(tx_0, ty_0) = \frac{1}{2}\langle H_{f_a} tv, tv\rangle - 2t(x_0+y_0)$$

$$= \frac{1}{2}\langle \lambda t v, tv\rangle - 2t(x_0+y_0)$$

$$= \frac{\lambda}{2}\|tv\|^2 - 2t(x_0+y_0)$$

$$= \frac{\lambda t^2}{2}\|v\|^2 - 2t\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, v\rangle \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$$

donc f_a n'admet pas de minimum global

5. Si $a = 2$

$$f_a(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y$$

Exercice 2.2

$$f(x) = e^{\|x\|^2} + \langle a, x \rangle$$

1. f est continue oz une composée et une somme des fonctions continues.

De plus boules fermé est une partie fermée et bornée d'où elle est compact.

Alors f admet un minum global sur cette boule.

2. On définie
$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \|x\|^2 - \rho^2$$

3. $\mathcal{L} = f - \mu h$

i.e $\mathcal{L}(x, \mu) = f(x) - \mu\, h(x)$

d'où les conditions sont

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \mathcal{L}(x, \mu) = 0 \\ \mu h(x) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x e^{\|x\|^2} - 2\mu x + a = 0 \\ \mu(\|x\|^2 - \rho^2) = 0 \\ \mu \leq 0 \\ \|x\|^2 - \rho^2 \leq 0 \end{cases}$$

4. $\mu \neq 0$ donc $h(x) = 0 \iff \|x\| = \rho$

$$\vec{\nabla} \mathcal{L}(x, \mu) = 2x e^{\|x\|^2} - 2\mu x + a = 0$$

$$(2e^{\|x\|^2} - 2\mu)x = -a$$

d'on en prennont la norme

$$(2e^{\rho^2} - 2\mu)\rho = a$$

(b) Donc $2e^{\rho^2} - 2\mu = \dfrac{\|a\|}{\rho}$

$$\iff 2\mu = 2e^{\rho^2} - \frac{\|a\|}{\rho}$$

$$\iff \mu = e^{\rho^2} - \frac{\|a\|}{2\rho}$$

Donc $x = -\dfrac{1}{2e^{\rho^2} - 2\mu} a = -\dfrac{2\rho}{\|a\|} a = -2\rho \dfrac{a}{\|a\|}$

(c) $2\rho e^{\rho^2} \leq \|a\|$

5. $\mu = 0$

(a) $2x e^{\|x\|^2} - 2\mu x + a = 0$

$\iff 2x e^{\|x\|^2} = -a$

$\iff 2\|x\| e^{\|x\|^2} = \|a\|$

(b) $\varphi(t) = 2t e^{t^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$

donc calculons

$\varphi'(t) = 2e^{t^2} + 4t^2 e^{t^2}$

$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \varphi'(t) > 0$ car $2e^{t^2} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$
et $4t^2 e^{t^2} \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$

Donc φ est strictement croissante, continue donc admet une réciproque (est bijective)

c) $x = -\dfrac{a}{2e^{\|x\|^2}}$ de plus $2e^{\|x\|^2} = \dfrac{\|a\|}{\|x\|}$

$= -\dfrac{\|x\|}{\|a\|} a$

donc $x = -\dfrac{\varphi^{-1}(\|a\|)}{\|a\|} a$

d) si $\|x\| \leq \rho$

i.e $\varphi^{-1}(\|a\|) \leq \rho$

$\|a\| \leq 2\rho e^{\rho^2}$

6. Somme et composée des convexes croissantes.

7.

Exercice 3.4

1. $\mathcal{L}(x, y, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 - \lambda(x+y-1) - \mu(-x)$

2. $f^*(\lambda, \mu) = \inf_{x,y} \mathcal{L}(x, y, \lambda, \mu)$

$$\vec{\nabla}_{x,y} \mathcal{L}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - \lambda + \mu \\ 2y - \lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{y} = \frac{\lambda}{2}$$
$$\tilde{x} = \frac{\lambda - \mu}{2}$$

Or f, g, h sont convexe $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ sont bien des points où

$\mathcal{L}(x,y)$ atteint le minimum

Donc $f^*(\lambda, \mu) = \left(\frac{\lambda-\mu}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - \lambda\left(\frac{\lambda-\mu}{2} + \frac{\lambda}{2} - 1\right) + \mu\left(\frac{\lambda-\mu}{2}\right)$

$$= \frac{1}{4}(\lambda^2 - 2\lambda\mu + \mu^2) + \frac{1}{4}\lambda^2 - \frac{1}{2}(\lambda^2 - \lambda\mu + \lambda^2) + \lambda + \frac{1}{2}(\lambda\mu - \mu^2)$$

$$= \frac{1}{4}\left((\lambda-\mu)^2 + \lambda^2\right) + \lambda + \frac{1}{2}(-2\lambda^2 + \lambda\mu + \lambda\mu - \mu^2)$$

$$= \frac{1}{4}\left((\lambda-\mu)^2 + \lambda^2\right) + \lambda - \frac{1}{2}\left((\lambda-\mu)^2 + \lambda^2\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left[(\lambda-\mu)^2 + \lambda^2\right] + \lambda$$

3. (a) $f^*(\lambda, \mu) = -\frac{1}{4}\left((\lambda-\mu)^2 + \lambda^2\right) + \lambda$

$$\vec{\nabla} f^*(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\left((\lambda-\mu) + \lambda\right) + 1 \\ \frac{1}{2}(\lambda-\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \mu$$

$$2\lambda - \mu = 2$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 2 = \mu$$

mais on a supposé que $\mu < 0$ donc il n'y a pas de point où le max de f^* est atteint lorsque $\mu < 0$

(b) $\vec{\nabla} f^*(\lambda, 0) = \begin{pmatrix} -\lambda + 1 \\ \frac{1}{2}\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \Leftrightarrow \lambda = 1 \\ \Leftrightarrow \lambda = 0 \end{matrix}$

$$f^*(\lambda, 0) = -\frac{1}{4}(2\lambda^2) + \lambda = -\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda$$

$-\frac{1}{2}\lambda^2+\lambda+c$

$\frac{-1}{-1}=1=\tilde{\lambda}$

Donc le max est en $\tilde{\lambda}=1$ et $f^*(1,0)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

(c) D'après ce qui précède le max est en point $(1,0)$

4. On a un problème d'optimisation convexe

et en prenant point $(1,0)$ on a $x+y=1$
$x>0$

en quel la contrainte n'est pas active alors les solutions des problèmes dual et primals coïncident donc

d'après 3 et 2

$x=-\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2}$ est le point où le min est atteint

$$\begin{pmatrix} 2x_1 \\ \vdots \\ 2x_n \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda+\mu_1 \\ \vdots \\ \lambda+\mu_n \end{pmatrix}$$