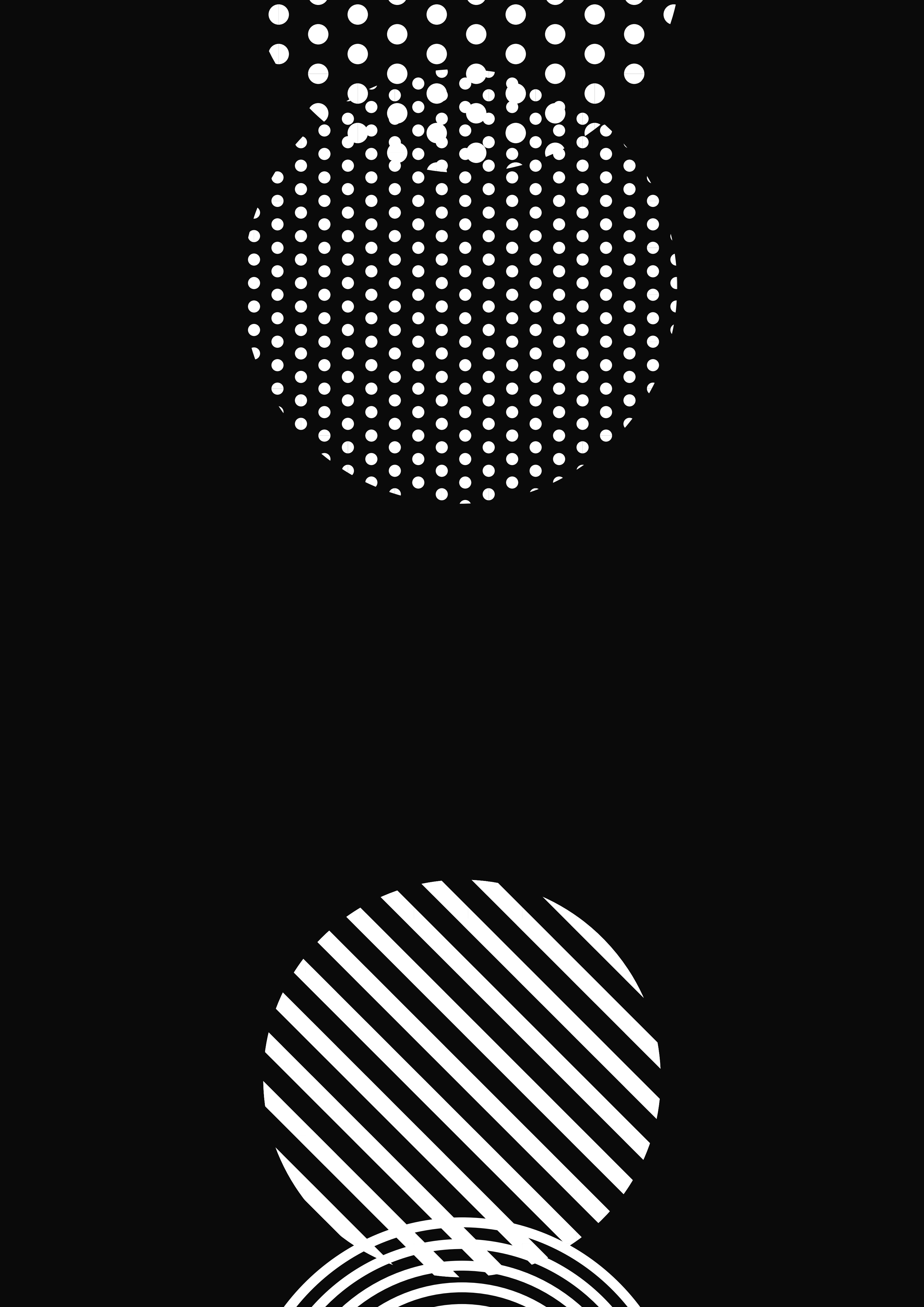


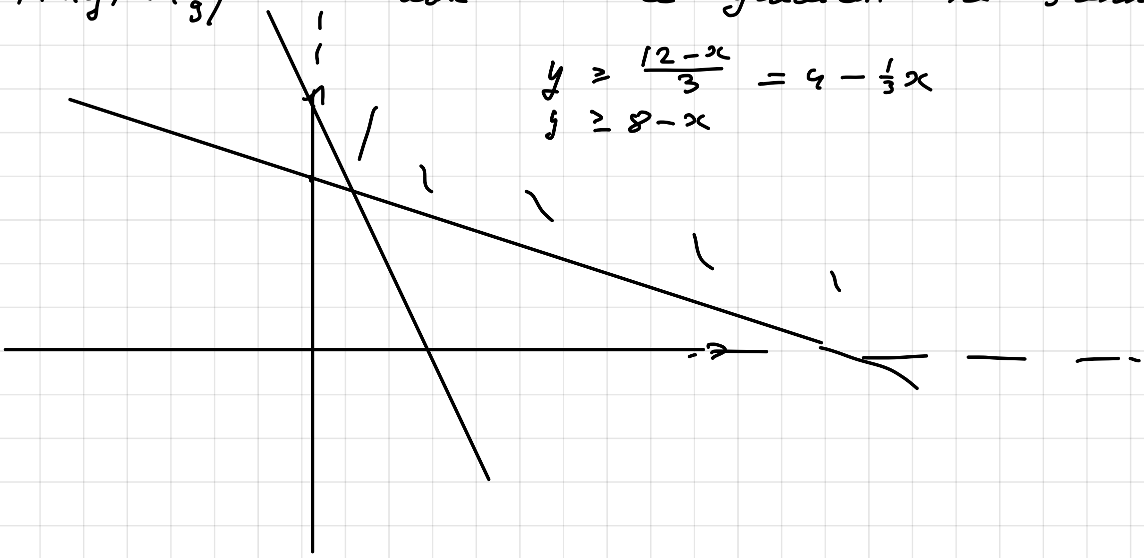
$f(x,y) = 6x + 9y$

$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ donc le gradient ne s'annule jamais.

2.

$y \geq \frac{12-x}{3} = 4 - \frac{1}{3}x$

$y \geq 8 - x$



3. a) $\begin{cases} x+3y = 12 \\ x+y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow 2y = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 6 \end{cases}$ ✓

$\begin{cases} x+3y = 12 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 0 \end{cases}$ ✗

$\begin{cases} x+3y \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 12$

$\begin{cases} x+y = 8 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 8$ ✓

$\begin{cases} x = 8 \\ y = 0 \end{cases}$ ✗

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ✗

b) $(0,0)$ viole les contraintes, de même $(8,0)$, $(0,4)$

Donc les sommets sont : $(2,6)$, $(0,8)$, $(12,0)$

4. D'après le théorème de solutions sommets,
si dans un problème linéaire il existe un extrema d'une fonction alors il est sur un sommet.

Or notre problème est linéaire et on admet que f admet un minimum, alors il est sur un sommet.
On a trouvé des sommets dans 3 b) il nous reste à vérifier chacun.

$f(12,0) = 60 + 12 = 72$

$f(2,6) = 12 + 54 = 66$

$f(0,8) = 72$

Donc le minimum est 66.

Exercice 3

2.

(a) $\vec{\nabla} g(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{\nabla} h_i(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) - \lambda g(x) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i h_i(x)$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} f(x) - \lambda \vec{\nabla} g(x) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{\nabla} h_i(x) = 0 \\ \lambda g(x) = 0 \\ \mu_i h_i(x) = 0 \\ \mu_i \leq 0 \\ h_i(x) \leq 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_i = \lambda + \mu_i \\ \sum x_i = -1 \\ \mu_i x_i = 0 \end{cases}$$

3. Si $h_i(\tilde{x})$ est active alors $\tilde{x}_i = 0$

4. (a) Si on aurait $p = n$ alors toutes les h_i sont active, alors on aurait $\tilde{x} = (0, \dots, 0)$

mais $\sum_{i=1}^{n} 0 \neq -1$ donc la contraint d'égalité serait violer d'où $p < n$.

(b) Si h_i est inactive donc $\mu_i = 0$ d'après le système

$2x_i = \lambda \Leftrightarrow x_i = \frac{\lambda}{2}$

(c) Donc $x_i = \frac{\lambda}{2}$ ou $x_i = 0$

donc $\sum x_i = -1$

donc $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{2} \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(x_i) = -1$

$= (n-p) \frac{\lambda}{2} = -1$

$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{2}{n-p}$

5. On a si h_i est active

donc $0 = \lambda + \mu_i \Leftrightarrow \mu_i = \frac{2}{n-p} > 0$ mais $\mu_i \leq 0$ absurde

donc toutes les contraintes sont inactives.

6. (a) $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ \vdots \\ 2x_n \end{pmatrix}$

$\mathcal{H}_f(x) = \begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$ définie positive donc strictement convexe.

7. D'après 4)5) $\tilde{x}_i = \frac{\lambda}{2} = -\frac{1}{n}$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

donc $f(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$

8. $\mathcal{L} = f(x) - \lambda g(x) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i h_i(x)$

$= \|x\|^2 - \lambda - \lambda \langle \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, x \rangle - \langle \mu, x \rangle$

$= \|x\|^2 - \langle \lambda v + \mu, x \rangle - \lambda$

$\vec{\nabla}_x \mathcal{L} = \left(2x_i - (\lambda v + \mu_i)\right)_i = 0 \Leftrightarrow x_i = \frac{\lambda + \mu_i}{2}$ donc $x = \frac{\lambda v + \mu}{2}$

donc $f^*(\lambda, \mu) = \| \frac{\lambda v + \mu}{2} \|^2 - \frac{1}{2} \| \lambda v + \mu \|^2 - \lambda$

$= -\frac{1}{4} \| \lambda v + \mu \|^2 - \lambda$

9. Si on a un problème convexe, il existe un point x tq $\forall i$ $h_i(x) < 0$ et $0 \in g(x)$ alors le problème primal et le problème dual ont la même solution.

10. donc d'après