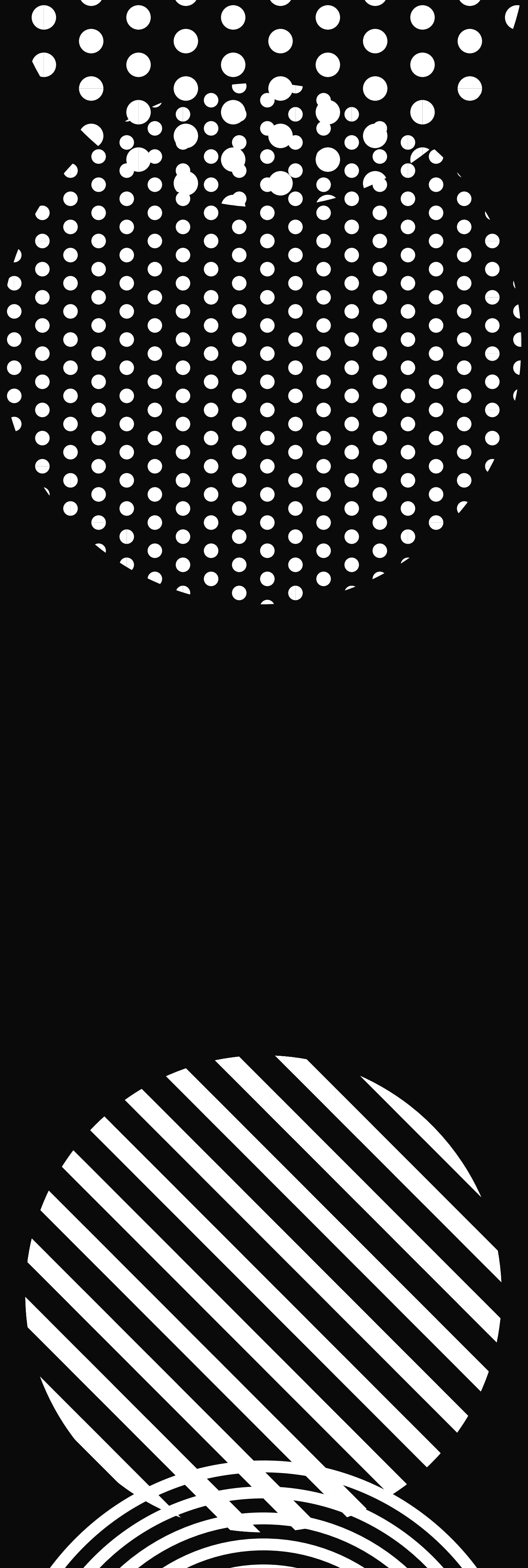


Exercice 3.1

1. $2^{(k^n)}$

2. x. $x \vee x \vee C \rightarrow x \vee C$
$x \vee \neg x \vee C \rightarrow \top$
$\neg x \vee x \vee C \rightarrow \top$
$\neg x \vee \neg x \vee C \rightarrow \neg x \vee C$

3. ex: $x \vee y$
$y \vee x$

$x \rightsquigarrow$ $x \in C$
$\neg x \in C$
$x, \neg x \notin C$

<u>réponse : $3^n + 1$</u>

il y a 3 possibilité
- x_i apparait dans la clause
- $\neg x_i$ apparait dans la clause
- $x_i, \neg x_i$ n'apparaissent pas dans la clause.

Il y a n variables. $\top$ (top) n'est pas représentable.

4. $C \models \mathcal{D}$ ssi $\tilde{C} \subseteq \mathcal{D}$
littéraux de C

---

si $\tilde{C} \neq \tilde{\mathcal{D}}$ alors $T_V(C) \neq T_V(\mathcal{D})$

pv :
$x \in \tilde{C}$
$x \notin \tilde{\mathcal{D}}$

on prend une interpretation
$l \in \tilde{\mathcal{D}}$ fausse
$\neg x \in \tilde{\mathcal{D}}$

$i' = i \cup \{x \rightarrow v\}$

Donc $\begin{cases} i' \not\models \mathcal{D} \\ i' \models C \end{cases}$

5. 1 ligne fausse
donc $2^n - 1$ vraies

$\boxed{\text{pourquoi !}}$

6. 2^{n-p} mais pourquoi ?
C p variables. 1 manière de fixer les valeurs de p vrai pour rendre C faux. $n-p$ autres variables prennent n'importe quelle valeur 2^{n-p}.
Donc $2^n - 2^{n-p}$ sont vraies.

Exercice 3.2

1. $clause(P) = \{\neg a_5 \vee x_1 \vee x_2 \vee x_3\} \cup$

$clause(\neg x_1 \vee a_1) \cup clause(\neg x_1 \vee b_1)$

$\cup\, clause(\neg x_2 \vee a_2) \cup clause(\neg x_2 \vee b_2)$

$\cup\, clause(\neg x_3 \vee \neg a_3) \cup clause(\neg x_3 \vee (b_3 \vee (a_4 \wedge b_4)))$

$= \{\neg a_5 \vee x_1 \vee x_2 \vee x_3\} \cup \{\neg x_1 \vee a_1\} \cup \{\neg x_1 \vee b_1\} \cup \{\neg x_2 \vee a_2\}$

$\cup \{\neg x_2 \vee b_2\} \cup \{\neg x_3 \vee a_3\}$

$\cup \{\neg x_3 \vee \neg b_3 \vee x_4\} \cup clause(\neg x_4 \vee a_4) \cup clause(\neg x_4 \vee b_4)$

$= \{\neg a_5 \vee x_1 \vee x_2 \vee x_3,\ \neg x_1 \vee a_1,\ \neg x_1 \vee b_1,\ \neg x_2 \vee a_2,$

$\neg x_2 \vee b_2,\ \neg x_3 \vee a_3,\ \neg x_4 \vee a_4,\ \neg x_4 \vee b_4\}$

2. Nombre de $\wedge$ décroit strictement.

3. $I \models \Sigma$ ssi pour tout $C \in \Sigma$ $I \models C$

si $I \models clause(P)$ alors $I \models P$

$- P = P_1 \wedge P_2$ supp $I \models clause(P_1) \cup clause(P_2)$

montrons $I \models P_1 \wedge P_2$

de $I \models clause(P_1) \cup clause(P_2)$ on déduit $I \models Clause(P_1)$
par HR $I \models P_1$ de même $I \models P_2$

$- P$ clause trivial donc $I \models P_1 \wedge P_2$

$P = l_1 \vee \dots \vee l_n \vee (R_1 \wedge Q_1) \vee \dots \vee (R_p \wedge Q_p)$
supposons

$I \models \{l_1 \vee \dots \vee l_n \vee x_1 \vee \dots \vee x_p\} \cup \bigcup_{i=1\dots p} clause(\neg x_i \vee R_i)$

$\cup \bigcup_{i=1\dots p} clause(\neg x_i \vee Q_i)$

montrer $I \models P$
on a $I \models l_1 \vee \dots \vee l_n \vee x_1 \vee \dots \vee x_p$ si $I \models l_i$ alors $I \models P$
sinon $I \models x_i$ on a aussi $I \models clause(\neg x_i \vee R_i)$

par HR $I \models \neg x_i \vee R_i$ $I \not\models \neg x_i$ on a $I \models R_i$
de m $I \models Q_i$ donc $I \models P$

si $I \models P$, alors il existe des valeurs de x_i : I'
tel que $I, I' \models clause(P)$

$P = P_1 \wedge P_2$, supposons $I \models P_1 \wedge P_2$

$I \models P_1$ et $I \models P_2$ par HR, il existe I_1 tq

$I, I_1 \models clause(P_1)$

Par HR, il existe I_2, tq $I, I_2 \models clause(P_2)$

existe I' tq $I, I' \models clause(P_1) \vee clause(P_2)$

$I' = I_1 \cup I_2$ ok car $(var\ I_1) \cap (var\ I_2) = \emptyset$

---

mq : P clause, $I' = \emptyset$

$P = l_1 \vee \dots \vee l_n \vee (R_1 \wedge Q_1) \vee \dots \vee (R_p \wedge Q_p)$
supposons
$I \models P$ trouvons I' tq $I, I' \models clause(P)$

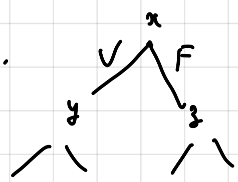
$clause(P) = l_1 \vee \dots \vee l_n \vee x_1 \dots \vee x_p$
$\vee \bigvee_i clause(\neg x_i \vee R_i)$

$\vee \bigvee_i clause(\neg x_i \vee Q_i)$

si $P \models l_i$ $\rightarrow$ $I' = \{ (x_j \mapsto F) \}$

$P \models Q_i \wedge R_i$ $\rightarrow$ $I' =$ $x_i \mapsto V$
$x_j \mapsto F$ pour $j \neq i$

Exercice 4.3

1. 

$y > x$
$z > x$

Bool(B)
$IF(x, P, Q)$

3. $not(B) = !B$
$not(IF(x, P, Q)) = IF(x, not(P), not(Q))$

$and(B_1, B_2)$ $B_1 \&\& B_2$
$and(B, IF(x, P, Q)) = IF(x, and(B, P), and(B, Q))$
$and(IF(x, P, Q), B) = IF(x, and(B, P), and(B, Q))$
$and(IF(x, P, Q), IF(y, R, S)) =$