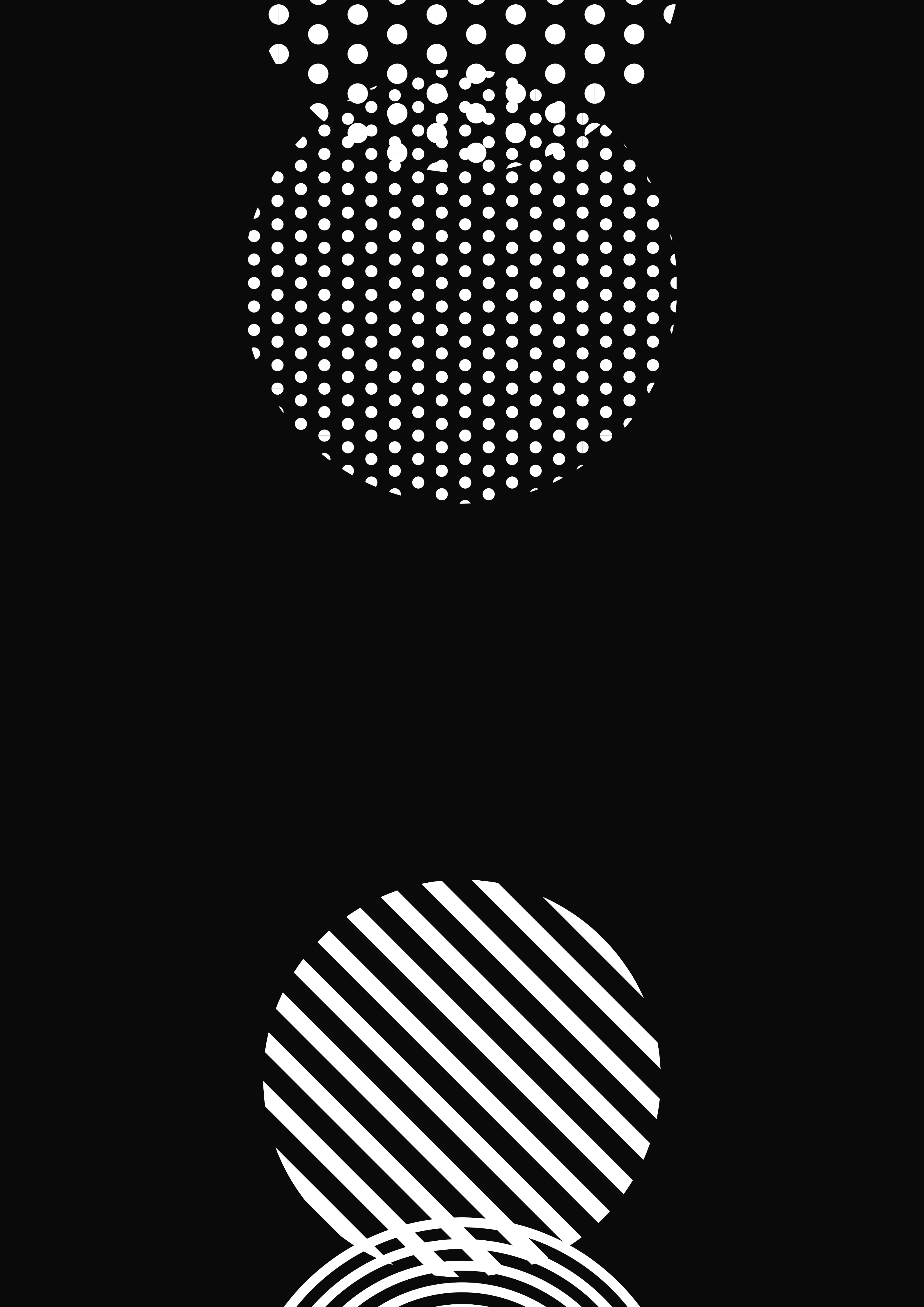

Exercice 5.3

- $p \wedge q$
- $p \vee (q \wedge r)$
- $q \wedge r$
- q, r, p
- $\neg(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow (p \wedge q)$

2. $sf(P) = \{P\}$ si P atomique

$sf(\neg P) = \{\neg P\} \cup sf(P)$

$sf(P \circ Q) = sf(P) \cup sf(Q) \cup \{P \circ Q\}$ où $\circ \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$

3.

$\phi(P)$: si P a n connecteurs alors $|sf(P)| \leq 2n+1$

→ $sf(P) = \{P\}$ où P atomique

$|sf(P)| \leq 2 \cdot 0 + 1 = 1$ par hyp de rec ✓

→ $sf(\neg P) = sf(P) \cup \{\neg P\}$

$|sf(\neg P)| = |sf(P)| + 1 \leq 2n+1+1 = 2(n+1) \leq 2(n+1)+1$

si P a n connecteurs, donc $\neg P$ a $n+1$ connecteurs

→ $sf(P \circ Q) = sf(P) \cup sf(Q) \cup \{P \circ Q\}$

donc $|sf(P \circ Q)| = (2|Q|+1) + (2|R|+1) + 1$ par HR

$\leq 2(|Q|+|R|) + 3$

$\leq 2(|Q \circ R|) + 1$

atteint lorsque les connecteurs sont d'arité 2.

Exercice 6.1

1. $\forall x_1, \dots, x_{n+1}, \bigvee_{1 \le i < j \le n+1} x_i = x_j$

vrai exactement dans des modèles équationnels avec moins de n éléments.

ou bien

$\exists x_1, \dots, x_n, \left(\bigwedge_{i<j} x_i \neq x_j \wedge \left(\forall z, \bigvee_{1 \le i \le n} x_i = z \right) \right)$

Exercice 6-2

1.) Soient $x_1, \dots, x_n$ tq $x_n = S(x_{n-1}), \dots, x_2 = S(x_1)$

$\{ S^k(0_N) \in \mathbb{N} \mid k \in \mathbb{N} \} \subseteq \mathbb{N}$

Si le domaine serait fini, on aurait

$S^k_N(0_N) = S_N^{k+p}(0_N)$ avec $p > 0$

donc $0_N = S^p(0_N) = S(\overbrace{S^{p-1}(0_N)}^{\neq 0}) = 70_N$

contradiction

injectivité + non-surjectivité ?

2) Oui.

3) Non, on peut avoir $0 = S(0) = 1$
$1 = S(1)$

et le domaine est $\{0, 1\}$

exercice 6-5

1) $\mathcal{I}(1) = (faux, faux)$
$\mathcal{I}(2) = (vrai, faux)$
$\mathcal{I}(3) = (faux, vrai)$
$\mathcal{I}(4) = (vrai, faux)$
$\mathcal{I}(5) = (faux, faux)$
$\mathcal{I}(6) = (vrai, vrai)$

2) 4 valeurs différentes

min $= 1$
max $= 4$

3) $\phi(A) \stackrel{def}{=} \forall i, i'$ si $i \simeq i'$ alors $val(i, A) = val(i', A)$

$\forall x, A$ $\quad i, i'$ $\quad i \simeq i'$ $\quad val(i, \forall x, A) = val(i', \forall x A)$
$d \in D$ $\quad val(i + (x \mapsto d), A) = val(i' + (x \mapsto d), A)$
$i + (x \mapsto d) \simeq i' + (x \mapsto d)$

$A \wedge B$
$\neg A$ $\quad i, i'$ $\quad i \simeq i'$ $\quad val(i, \neg A) = val(i', \neg A)$
par HR $\quad val(i, A) = val(i', A)$

$P(x)$ $\quad i \simeq i'$ $\quad val(i, P(x)) = val(i', P(x))$
$i(x) \simeq i'(x)$ vrai par def de $\simeq$

$Q(x)$

4) (a) image inverse d'un ensemble fini

(b) $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{6}$

(c) triviale

Exercice 6.6

1.) $\neg P \iff IF(P, \bot, \top)$

$P \wedge Q \iff IF(P, Q, \bot)$

$P \vee Q \iff IF(P, \top, Q)$

$\neg P \vee Q \iff If(\neg P, \top, Q)$

2.)

3)

4)
$$
\begin{aligned}
norm(X) &= X \\
norm(\top) &= \top \\
norm(\bot) &= \bot \\
norm(IF(A,B,C)) &= IFn(A, norm(B), norm(C))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
IFn(X, Q, R) &= IF(X, Q, R) \\
IFn(\top, Q, R) &= IF(\top, Q, R) \\
IFn(\bot, Q, R) &= IF(\bot, Q, R) \\
IFn(IF(A,B,C), Q, R) &= IFn(A, IFn(B,Q,R), IFn(C,Q,R))
\end{aligned}
$$

Exercice 6.7