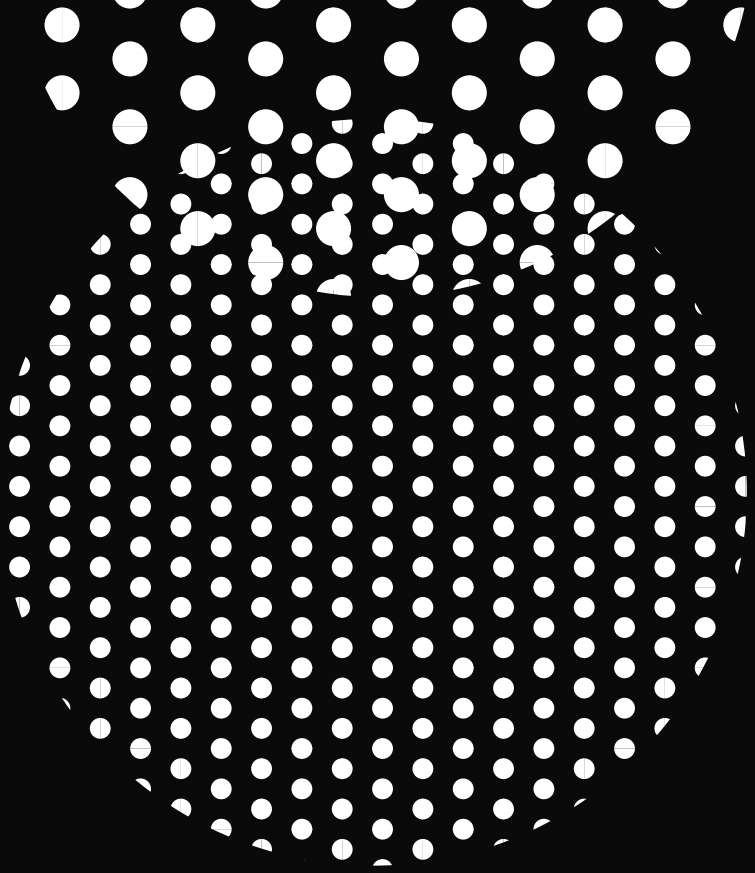

Exercice 5.1

$simpl((x \wedge y) \Rightarrow z) = \neg\, simpl(x \wedge y) \vee simpl(z)$

$simpl(x \wedge y) = \neg(\neg\, simpl(x) \vee \neg\, simpl(y))$

$= \neg(\neg x \vee \neg y)$

Donc $simpl((x \wedge y) \Rightarrow z) = \neg\neg(\neg x \vee \neg y) \vee z$

$= \neg(x \wedge y) \vee z$

2. $ht(P) = 0$ si P atomique
$ht(\neg P) = 1 + ht(P)$
$ht(P \circ Q) = 1 + max(ht(P), ht(Q))$

3. $\phi(n) \equiv$ pour tout P, si $ht(P) \leq n$ alors $\Rightarrow$ & $Simpl(P)$
~~alors $ht(Simpl(P)) \leq n$!~~

$\phi(0)$: P, $ht(P) \leq 0$ donc $ht(P) = 0$
donc P atomique

$P = \top$ $\quad simp(P) = a \vee \neg a$
$= \bot$ $\quad = \neg(a \vee \neg a)$
$= X$ $\quad \leq X$

On suppose $\phi(n)$ vrai, montrons $\phi(n+1)$

P, si $ht(P) \leq n+1$ alors $\Rightarrow$ & $simp(P)$

P atomique $\Rightarrow$ OK (cas de base)

$\neg P$ alors $ht(P) \leq n$ donc $\Rightarrow$ & $simp(P)$

$ht(P \circ Q) \leq n+1$ alors $ht(P) \leq n$, $ht(Q) \leq n$ donc HR $\Rightarrow$ & $simp(P)$, $simp(Q)$

On regarde $simp(P \wedge Q) = \neg(\neg simp(P) \vee \neg simp(Q))$
$simp(P \vee Q) = simp(P) \vee simp(Q)$
$simp(P \Rightarrow Q)$

et on conclut.

4)

$\phi(P) :=$ $\Rightarrow$ & Simpl(P)

Si $P = \bot$ alors $Simp(P) = a \vee \neg a$

$Q = \top$ $Simpl(Q) = \neg(a \vee \neg a)$

alors

$\phi(P)$ et $\phi(Q)$ sont vérifiés

Soit P, Q tq $\phi(P)$ et sont vérifiés donc $\Rightarrow$ & Simpl(P)

$\phi(Q)$ $Simp(\neg P) = \neg Simp(P)$ $\Rightarrow$ & Simpl(Q)

donc $\phi(\neg P)$ est vérifié

$Simp(P \wedge Q) = \neg(\neg Simpl(P) \vee \neg Simpl(Q))$

donc $\Rightarrow$ & Simpl$(P \wedge Q)$

donc $\phi(P \wedge Q)$ vérifié,

...

Exercice 5.2

1. $\neg(\neg P \vee Q)$

2.

(a) $\neg((\neg P) \Rightarrow (Q \vee \neg(P \vee R)))$

$= \neg(\neg(\neg P) \vee (Q \vee \neg(P \vee R)))$

$= \neg(P \wedge (Q \vee \neg(P \vee R)))$

$= \neg P \wedge \neg(Q \vee \neg(P \vee R))$

$= \neg P \wedge (\neg Q \wedge (P \vee R))$

$= \neg P \wedge \neg Q \wedge (P \vee R)$

6)

neg(T) $= \bot$

neg($\bot$) $= T$

neg(X) $= \neg X$

neg($\neg A$) $= A$

neg$(P \wedge Q)$ = neg(P) $\vee$ neg(Q)

neg$(P \vee Q)$ = neg(P) $\wedge$ neg(Q)

neg$(P \Rightarrow Q)$ = $P \wedge$ neg(Q)

Exercice 5.4

$xin(\bot, x) = faux$
$xin(\top, x) = faux$
$xin(R(t_1, \ldots), x) = xint(t_i, x)$ ou $xint(u, x)$
$xin(A \circ B, x) = xin(A, x) \vee xin(B, x)$
$xin(\neg A, x) = xin(A, x)$
$xin(\forall y, A, x) = x <> y \wedge xin(A, x)$
$xin(\exists y, A, x) = x <> y \wedge xin(A, x)$

$xint(y, x) = y = x$
$xint(a, x) = faux$
$xint(g(t), x) = xint(t, x)$
$xint(f(t, u), x) = xint(t, x) \vee xint(u, x)$

Exercice 5.5

1. $R(f(a, g(y)), g(x))$
2. $R(f(a, g(x)), g(x))$
3. $\forall x, R(x, g(g(3)))$
4. $\forall x', R(x', g(g(x)))$