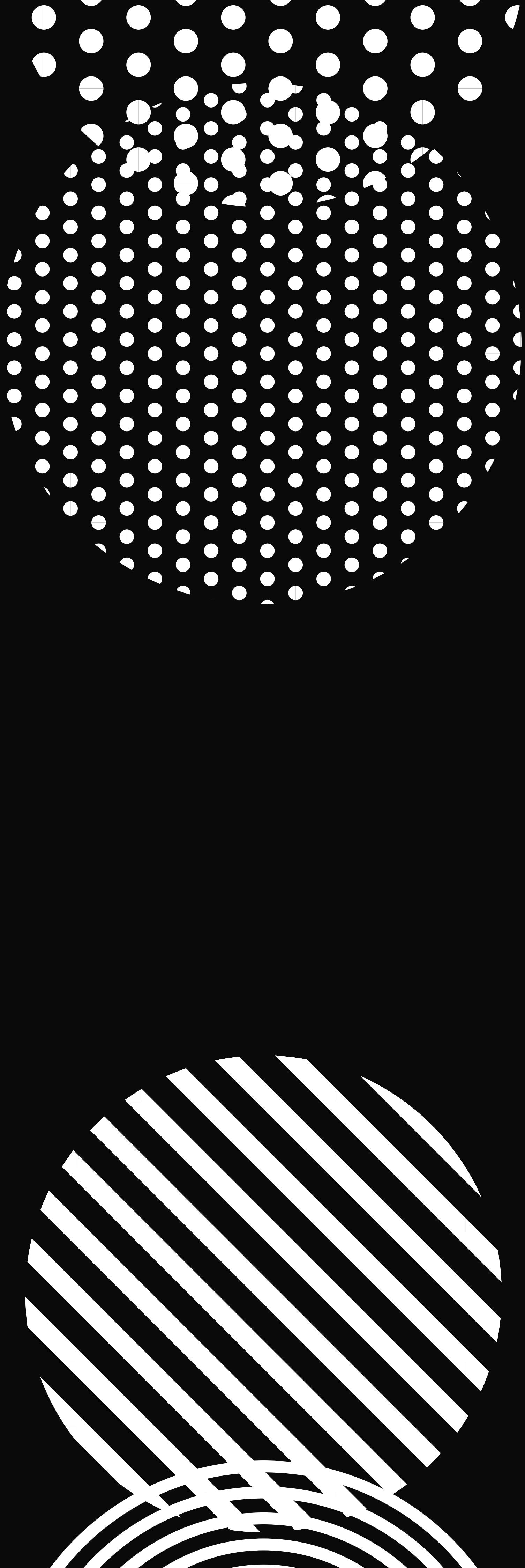

Exercice 6.1

1. $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$

$\equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee x)$

$\neg(x \Leftrightarrow y) = \neg((\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee x))$

$\equiv \neg(\neg x \vee y) \vee \neg(\neg y \vee x)$

$\equiv (x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x)$

$\equiv (x \vee (y \wedge \neg x)) \wedge (\neg y \vee (y \wedge \neg x))$

$\equiv ((x \vee y) \wedge (x \vee \neg x)) \wedge ((\neg y \vee y) \wedge (\neg y \vee \neg x))$

$\equiv (x \vee y) \wedge (\neg y \vee \neg x)$

2.

x	y	z	$y \Leftrightarrow z$	res
V	V	F	F	F
F	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	F	V	F	V
V	V	V	V	V
F	V	V	V	F
V	F	F	V	V
F	F	F	V	F

satisfiable mais pas valide.

3.

Γ	Δ	p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\Gamma, p \vdash \Delta, q$	$\Gamma, q \vdash \Delta, p$	$\Gamma \vdash \Delta, p \Leftrightarrow q$
F	-	-	-	—	V	V	V
V	V	F	V		V	V	V
V	F	F	V		V	F	F
V	-	F	F	—	V	V	V
V	V	V	-		V	V	V
V	F	V	V		V	V	V
	F	V	F		F	V	F

a) b) correcte ET Inversible. (pour gauche)

Γ	Δ	p	q	$\Gamma, p, q \vdash \Delta$	$\Gamma \vdash \Delta, p, q$	$\Gamma, p \Leftrightarrow q \vdash \Delta$
F	–	–	–	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V
V	V	–	–	V	V	V
V	F	V	V	F	V	F
V	F	F	F	V	F	F
V	F	-	–	V	V	V
V	F					

a) b) droite : correcte et inversible.

b) alternative

$$\Rightarrow g\ \dfrac{\Rightarrow g\ \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, A, B} \quad \dfrac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}\ hyp}{\Gamma, B \Rightarrow A \vdash \Delta, A} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, B \vdash \Delta, B}\ hyp \quad \dfrac{}{\Gamma, B, A \vdash \Delta}}{\Gamma, B, B \Rightarrow A \vdash \Delta}}{\wedge g\ \dfrac{\Gamma, A \Rightarrow B, B \Rightarrow A \vdash \Delta}{\Gamma, (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \vdash \Delta}}$$

c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{hyp\ \dfrac{}{x, y \vdash x} \quad hyp\ \dfrac{}{x, y \vdash y}}{x, y \vdash x \Leftrightarrow y} \quad \dfrac{\dfrac{}{x, y \vdash x}\ hyp \quad \dfrac{}{x \vdash x, y}\ hyp}{x, x \Leftrightarrow y \vdash y}}{x \vdash y \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y)} \quad \dfrac{(*)}{y \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y) \vdash x}}{\vdash x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y))}$$

$$(*) \quad \dfrac{\dfrac{}{y, x \Leftrightarrow y \vdash x} \quad \dfrac{hyp\ \dfrac{}{x \vdash x, y} \quad \dfrac{}{y \vdash x, y}\ hyp}{\vdash x, y, (x \Leftrightarrow y)}}{y \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y) \vdash x}$$

d) J'ai un arbre de dérivation. Donc la formule est valide.

Exercice 6.2

1. $\top \equiv a \Rightarrow a$

$\bot \equiv \neg(a \Rightarrow a)$

$q \equiv (a \Rightarrow a) \Rightarrow q$

$\neg q \equiv \neg((a \Rightarrow a) \Rightarrow q)$ $\qquad p \wedge \neg q \qquad \neg(p \Rightarrow q)$

$p \wedge q \equiv \neg(p \Rightarrow \neg q)$

$p \vee q \equiv \neg p \Rightarrow q$

2.
(B) $\varphi(A) = |\{i \mid i \models A\}|$ pair

induction sur la structure de la formule

$A = x$ $\qquad \varphi(x)$ vrai car 2 interpr. qui rendent vrai x.

$A = \neg B$ $\qquad |\{i \models B\}|$ pair $\qquad |\{i \not\models B\}|$ pair $\qquad$ car $\underbrace{|\{i\}|}_{\text{nb total}}$ pair

$A = B \Leftrightarrow C$