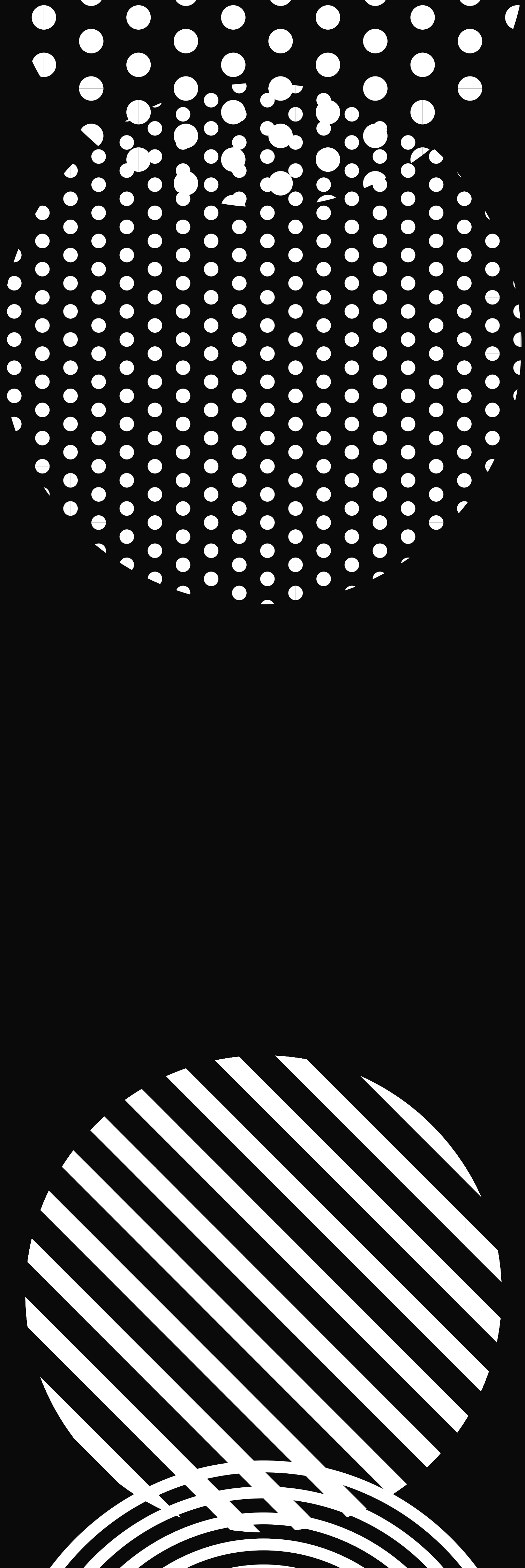

Exercice 1

1. Fan
2. skolimization
   choix de l'arité
3. prenexe
4. FNC

1. $\forall x, (\neg p(x) \vee \exists y, \forall x, q(x,y))$

$\equiv \forall x, (\neg p(x) \vee \forall z, q(z,a))$ j'introduit une fonction a l'arité 0.

$\equiv \forall x, \forall z (\neg p(x) \vee q(z,a)) \equiv (\neg p(x) \vee q(z,a))$

2. $F_1 = ((\exists x, (p(x) \Rightarrow z(x))) \vee \forall y, p(y)) \wedge \forall x, \exists y (z(y) \Rightarrow p(x))$

$\equiv ((\exists x (\neg p(x) \vee z(x))) \vee \forall y, p(y)) \wedge \forall x, \exists y (\neg z(y) \vee p(x))$

$\equiv ((\neg p(a) \vee z(a)) \vee \forall y, p(y)) \wedge \forall x, (\neg z(f(x)) \vee p(x))$

$\equiv \forall y \forall x \ (\neg p(a) \vee z(a) \vee p(y)) \wedge (\neg z(f(x)) \vee p(x))$

$\equiv (\neg p(a) \vee z(a) \vee p(y)) \wedge (\neg z(f(x)) \vee p(x))$

3. $F_3 = ((\forall x, (p(x) \Rightarrow \exists y, q(y))) \Rightarrow \exists z, z(z)) \Rightarrow \exists u, s(u)$

$\equiv ((\forall x, (\neg p(x) \vee \exists y, q(y))) \Rightarrow \exists z, z(z)) \Rightarrow \exists u, s(u)$

$\equiv (\neg(\forall x, (\neg p(x) \vee \exists y, q(y))) \vee \exists z, z(z)) \Rightarrow \exists u, s(u)$

$\equiv ((\exists x, p(x) \wedge \forall y, \neg q(y)) \vee \exists z, z(z)) \Rightarrow \exists u, s(u)$

$\equiv \neg((\exists x, p(x) \wedge \forall y, \neg q(y)) \vee \exists z, z(z)) \vee \exists u, s(u)$

$\equiv ((\forall x, \neg p(x) \vee \exists y, q(y)) \wedge \forall z, \neg z(z)) \vee \exists u, s(u)$

$\equiv ((\forall x, \neg p(x) \vee \exists y, q(y)) \vee (\exists u, s(u))) \wedge (\forall z, \neg z(z) \vee \exists u, s(u))$

$\equiv ((\forall x, \neg p(x) \vee q(a)) \vee s(b)) \wedge (\forall z, \neg z(z) \vee s(c))$ On introduit 3 constantes a, b, c

$\equiv \forall x \forall z \quad (\neg p(x) \vee q(a) \vee s(b)) \wedge (\neg z(z) \vee s(c))$

$\equiv (\neg p(x) \vee q(a) \vee s(b)) \wedge (\neg z(z) \vee s(c))$

Exercice 5.2

1. $A = (\exists x, \neg P(x)) \Rightarrow ((\forall x, P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall x, Q(x))$

$= (\forall x, P(x)) \vee ((\exists x, \neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \forall x, Q(x))$

2. Oui, oui, oui par les lois de Morgans

3. $B = (\forall x, P(x)) \vee ((\exists x, \neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \forall x, Q(x))$

$\equiv (\forall x, P(x)) \vee ((\neg P(a) \wedge \neg Q(a)) \vee \forall y, Q(y))$ On introduit une constante a

$\equiv \forall x, y, (P(x)) \vee ((\neg P(a) \wedge \neg Q(a)) \vee Q(y))$

$=: C$

4. non
oui
non

5. Oui $C \models B \models A$ donc A aussi

6. Oui comme C l'est

7. $\neg A = \neg((\forall x, P(x)) \vee ((\exists x, \neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \forall x, Q(x)))$

$= (\exists x, \neg P(x)) \wedge (\forall x, P(x) \vee Q(x)) \wedge (\exists x, \neg Q(x))$

$= \neg P(a) \wedge (\forall x, P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg Q(b)$ on introduit deux constantes a, b

$= \forall x, \neg P(a) \wedge (P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg Q(b)$

$\equiv \neg P(a) \wedge (P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg Q(b)$

8. Domaine a, b signature P, Q

Base de Herbrand : $P(a), P(b), Q(a), Q(b)$

$\neg P(a) \wedge (P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg Q(b)$

donc si $Q(a)$ vrai et $P(b)$ vrai, $P(a)$ faux, $Q(b)$ faux
la formule est satisfiable

9. $\neg A$ satisfiable donc A n'est pas valide.

<u>Exercice 5.3</u>