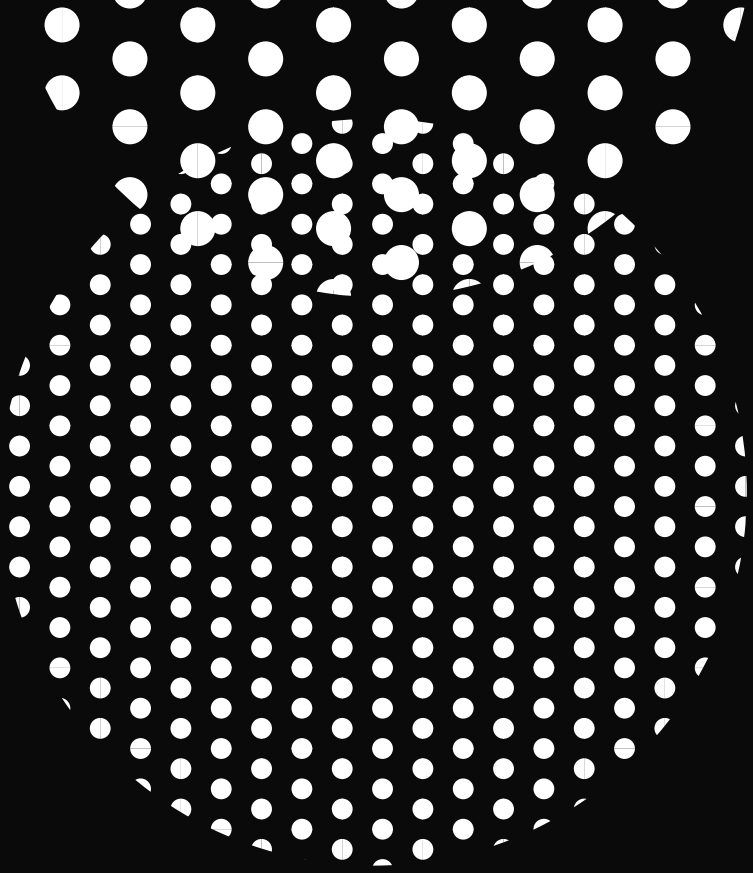

Exercice 4

1)

(a) 1) $\forall x, y, z \quad x = y \wedge y = z \Rightarrow x R z$

2) $\forall x, y \quad x = y \Leftrightarrow y = x$

3) $\forall x \quad x = x$

4) $\forall x_1, y_1, x_2, y_2, \quad (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2) \Rightarrow (R(x_1, y_1) \Rightarrow R(x_2, y_2))$

(b)

$x = y \Rightarrow (R(x,y) \Rightarrow R(y,y))$

$(x = y \wedge R(x,y)) \Rightarrow R(y,y)$

$\forall x, \quad x = x$ donc $\exists y, \ y = x$

Supposons $R(y,y)$ donc on peut choisir x de valeur de y donc $x = y$ et $R(y,y) \Rightarrow R(x,y)$

donc $(\exists x, \ x = y \wedge R(x,y))$

On a $\forall x_1, x_2 \quad x_1 = x_2 \Rightarrow (R(x_1, y) \Rightarrow R(x_2, y))$

donc $\forall x_1 = y \Rightarrow (R(x_1, y) \Rightarrow R(y,y))$

Supposons maintenant $R(y,y)$ est vrai

Donc $\forall x \quad x = y \Rightarrow (R(y,y) \Rightarrow R(x,y))$

d'où on a $\forall x, x = y \Rightarrow R(x,y)$

2) (a) par les axiomes de Σ

$x = 0 \Leftrightarrow P_0(x)$

$x = S(y) \Leftrightarrow P_S(y, x)$

Donc $\forall x, (x = 0 \vee \exists y, x = S(y))$

$\Leftrightarrow \forall x, P_0(x) \vee \exists y, P_S(y, x)$

(b) $S(x) = x' \Leftrightarrow P_S(x, x')$
$S(y) = y' \Leftrightarrow P_S(y, y')$

$\forall x, y \ (\exists x', y' \ P_S(x, x') \wedge P_S(y, y') \wedge y' = x') \Rightarrow x = y$

b) $Q(S(t)) \iff \exists y,\ P_S(t,y) \wedge Q(y)$