Exercice 6.1

1. $\forall x_1, \dots, x_{n+1} \quad \bigvee_{1 \le i < j \le n+1} x_i = x_j$

2) $\exists x_1, \dots, x_n \quad \bigwedge_{1 \le i < j \le n+1} (x_i \neq x_j)$

Exercice 6.2

1. Supposons que le domaine est fini, donc soit

$|\mathcal{D}| = n \qquad$ et $\mathcal{D} = \{x_1, \dots, x_n\}$

$\forall x \qquad S(x) \in \mathcal{D}$

$S^{n+p}(x_1) = S^p(\underbrace{S^n(x_1)}_{=0}) = x_2$

$0 = S^{n-1}(x) \qquad$ contradiction

2) Oui, car l'injectivité force le domaine d'être infini.

3) On peut avoir le cas $S(0) = 1 \quad$ et $S(1) = 1$
et donc on se ferme dans le domaine fini $\{0, 1\}$

4) L'injectivité ? $\quad \forall x, y, \; S(x) = S(y) \Rightarrow x = y$

Exercice 6.3

3. $\forall x_1, x_2, x_3, x_4 \qquad x_1 = x_2 \vee x_2 = x_3 \vee x_3 = x_4 \vee x_1 = x_4 \vee x_1 = x_3 \vee x_2 = x_4$

ou

$\exists x, y, z \qquad x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z$

4. $\forall n \in \mathbb{N}, \; \exists x_1, \dots, x_n \quad \bigwedge_{1 \le i < j \le n} x_i \neq x_j$

5. On ajoute dans le domaine une infinité de constante. $\{c_0, \dots$
et dans les axiomes $A \cup \{c_j \neq c_i : i \neq j\}$ pour tous les ss-ens de nos constante. On obtient un modèle infini avec un domaine infini.

On peut extraire un sg-ens de constant et l'axiome associé qui est satisfiable.

Donc le théorème de compacité s'applique.

<u>Exercice 6.4</u>

1.

(a) $val(e, t) = e(x)$ si $t = x$ (x une variable libre)
$val(e, t_1 \circ t_2) = val(e, t_1) \circ val(e, t_2)$

$e_J(x) = e_I(x)$ car J est sous-interprétation de I.

D'où $val_J(e, t) = val_I(e, t)$

(b) (i) la preuve identique à a

(ii) Supposons que $val_I(e, \forall x_1, \dots, x_n, A) = V$

Pour J $\forall x_1, \dots, x_n \in E$ $x_1, \dots, x_n \in D$ aussi

donc $val_J(e, \forall x_1, \dots, x_n A) = V$

(iii) Supposons que $val_J(e, \exists x_1, \dots, x_n A) = V$

$x_1, \dots, x_n \in E \subset D$ donc ce cas est vrai pour J aussi

d'où $val_I(e, \exists x_1, \dots, x_n A) = V$

(iv). $val_J(e, \forall x_1, \dots, x_n\ x_1 \geq 0 \wedge \dots \wedge x_n \geq 0) = V$

faux pour J car $-1 > 0 \Leftrightarrow$ faux.

$val_I(e, \exists x_1, \dots, x_n\ x_1 < 0 \wedge \dots \wedge x_n < 0)$

faux pour J.

2) (a) $|E| \leq n + m$

donc B vrai dans J

(b) $E \subset D$

Exercice 6.6

$A = ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$

$IF(p, q$

$\neg p \vee q$

$IF(p, q, T)$

$IF(IF(p, q, T), p, T)$

$IF(IF(IF(p, q, T), p, T), p, T)$

6) $IF(IF(p, q, T), IF(p, p, T), IF(T, p, T))$

$= IF(IF(p, q, T), T, p)$

$= IF(p, IF(q, T, p), IF(T, T, p))$

$= IF(p, IF(q, T, p), T) \equiv T$

Exercice 6.7

1) $vald(I, Bool\ b) = I(b)$

$vald(I, IF(x, P, Q)) = IF(I(x), Vald(I, P), Vald(I, Q))$