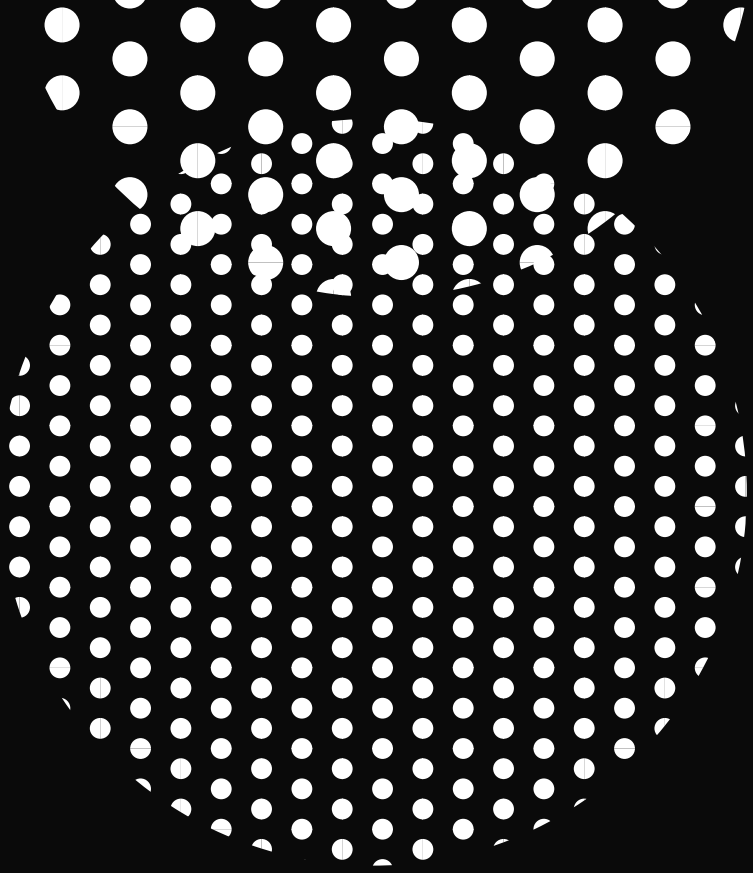

Exercice 8.1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{[1,+\infty[} \left| \frac{e^{ixt^2\ln(t)}}{1+t^4} \right| d\lambda(t) = \int_{[1,+\infty[} \frac{1}{1+t^4}\, d\lambda(t) = \lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{1}{1+t^4}\, d\lambda(t)$$

$=$

$$\underset{f(t)}{\frac{1}{1+t^4}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \underset{g(t)}{\frac{1}{t^4}}$$

Montrer qu'il existe $T>0$ et $\alpha \geq 0$

$$\forall t \geq T, \quad \frac{1}{1+t^4} \leq \alpha \frac{1}{t^4}$$

$$\frac{f(t)}{g(t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1 \qquad \exists T>0 \text{ tq } \forall t>T$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{f(t)}{g(t)} \leq \frac{3}{2}$$

$$\frac{g(t)}{2} \leq f(t) \leq \frac{3}{2} g(t) \qquad \text{i.e} \quad \frac{1}{1+t^4} \leq \frac{3}{2}\frac{1}{t^4}$$

Montrons que $\int_{[1,+\infty[} \frac{1}{1+t^4}\, d\lambda(t) < +\infty$

$$\int_{[1,+\infty[} \frac{1}{1+t^4}\, d\lambda(t) = \int_1^T \frac{d\lambda(t)}{1+t^4} + \underbrace{\int_T^{+\infty} \frac{d\lambda(t)}{1+t^4}}_{\leq \int_T^{+\infty} \frac{1}{t^4} d\lambda(t)}$$

$t \in [1,T] \mapsto \frac{1}{1+t^4}$ est continue sur un compact donc bornée donc intégrable (intégrale finie)

2.

i. $t \mapsto f(x,t)$ mesurable car continue

ii. $x \mapsto f(x,t)$ continue

iii. $|f(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^4}$

donc par théorème de continuité sous le signe $\int$ on a que F est continue.

3.

i) Soit $x \in J$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable par 1)

ii) Soit $t \in [1,+\infty[$ $x \mapsto \frac{e^{ixt^2\ln(t)}}{1+t^4}$ est $\mathcal{C}^1$ comme composée de fs. $\mathcal{C}^1$

iii) $$\left|\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right| = \left|\frac{it^2\ln(t)}{1+t^4} e^{ixt^2\ln t}\right| \overset{\text{métalo 1}}{=} \frac{t^2\ln(t)}{1+t^4} \leq \frac{\ln(t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^a}$$ avec $a>1$ donc intégrable.

méthode 2: $\frac{t^2\ln(t)}{1+t^4} \sim \frac{\ln(t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^{1+\varepsilon}}$ $\varepsilon > 0$

$\lesssim \frac{1}{t^{3/2}}$

mini-exo: Mq $\exists T > 0$ $\alpha > 0$

tq $\underbrace{\frac{t^2\ln(t)}{1+t^4}}_{f(t)} \leq \underbrace{\frac{\alpha}{t^{3/2}}}_{g(t)}$

$$\frac{t^2\ln(t)}{1+t^4} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^2}$$

~~donc $\exists T' > 0$ tq $\frac{t^2\ln(t)}{1+t^4} \leq \frac{\ln(t)}{t^2}$~~

~~$\ln(t) \leq \sqrt{t}$~~

~~$\ln(t)^2 \leq t$~~

~~$\sqrt{t} - \ln(t) \geq 0$~~

~~$e^{\sqrt{t}-\ln(t)} \geq 1$~~

~~$\Leftrightarrow \frac{e^{\sqrt{t}}}{t} \geq 1$~~

~~$\Leftrightarrow e^{\sqrt{t}} \geq t$ donc $\exists T > T'$~~

~~$\forall t \geq T$~~

~~tq $e^{\sqrt{t}} \geq t \Leftrightarrow \ln(t) \leq \sqrt{t}$ d'où~~

~~et $\frac{t^2\ln(t)}{t^4} \leq \frac{1}{t^{3/2}}$~~

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{t^{3.5}\ln(t)}{1+t^4} = \frac{t^4\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\ln(t)\right)}{t^4\left(\frac{1}{t^4}+1\right)} = \frac{\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0}{1+\frac{1}{t^4} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Il existe $T > 0$, tq $q(t) \leq \frac{1}{2}$ pour $t \geq T$ et donc

$t \geq T$, $\frac{t^2\ln(t)}{1+t^4} \leq \frac{\frac{1}{2}}{t^{3/2}}$

ITUCDA
BGCHTEP

Exercice 8.3

Bonus :

$$\frac{1}{\sqrt{t-t^2}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Mq $\exists\, \varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tq $t \leq \varepsilon$ $\quad \frac{1}{\sqrt{t-t^2}} \leq \frac{\alpha}{\sqrt{t}}$

TRAIN THIS !!!

1. $\int_{]0,1]} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \lim_{n\to+\infty} \left[2\sqrt{t}\right]_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}$

$= \lim_{n\to+\infty} 2\sqrt{1-\frac{1}{n}} - 2\sqrt{\frac{1}{n}}$

$= 2$

donc $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$

$t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{t+t^2}}$

$\frac{1}{\sqrt{t+t^2}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$

i.e $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{t+t^2}}}{\frac{1}{\sqrt{t}}} = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+t^2}} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 1$

donc $\exists\, T > 0$ tq $\forall\, t \leq T$

$\frac{1}{\sqrt{t+t^2}} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}$

donc $\int_{]0,1]} \frac{1}{\sqrt{t+t^2}}\, dt = \int_{]0,T]} \frac{1}{\sqrt{t+t^2}}\, dt + \int_{]T,1]} \frac{1}{\sqrt{t+t^2}}\, dt$

$\leq \frac{1}{2}\int_{]0,T]} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt + \int_{]T,1]} \frac{1}{\sqrt{t+t^2}}\, dt$

$= \sqrt{T} + \int_{]T,1]} \frac{1}{\sqrt{t+t^2}}\, dt$

$\leq \sqrt{T} + \int_{]T,1]} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$ donc intégrable.

2. $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t+t^2}}$

$$\frac{t}{\sqrt{t+t^2}} = \frac{t}{t\sqrt{\frac{1}{t}+1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t}+1}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$$

donc $\exists\, T>0$ tq $\forall t \geq 1$ $\frac{1}{2}\frac{1}{t} \leq \dfrac{1}{\sqrt{t+t^2}}$

donc $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t+t^2}}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$

$\int_{]0,+\infty[} \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t+t^2}}\,dt$ d'après 2 $\int_{]0,+\infty[} \frac{1}{\sqrt{t+t^2}}\,dt$ diverge

donc si $x=0$ $e^{-tx}=1$ donc $\int_{]0,+\infty[} \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t+t^2}}\,dt = \int_{]0,+\infty[} \dfrac{1}{\sqrt{t+t^2}}\,dt$
donc diverge

si $x<0$ donc $-tx>0$ donc $e^{-tx}>1$

et donc $\int_{]0,+\infty[} \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t+t^2}}\,dt \geq \int_{]0,+\infty[} \dfrac{1}{\sqrt{t+t^2}}\,dt$ donc diverge.

Supposons $x>0$

$\dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t+t^2}} \leq e^{-tx}$ pour $t+t^2 \geq 1$

et $\int_{[1,+\infty[} e^{-tx}\,dt = \left[-\dfrac{e^{-tx}}{x}\right]_1^{+\infty}$

$= 0 + \dfrac{e^{-x}}{x}$

donc $\dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t+t^2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$

Si $t+t^2 \in]0,1[$

donc $\dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t+t^2}} < \dfrac{1}{\sqrt{t+t^2}}$ car $e^{-tx} < 1$

et $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t+t^2}}$ est intégrable sur $]0,1[$

donc $t \longmapsto \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t+t^2}}$ est intégrable ssi $x>0$

4. Soit $a>0$

$$F(x) = \int_{]0,+\infty[} f(x,t)\, d\lambda(t)$$

Or e^{-tx} est décroissante pour $t>0$ sur $]a,+\infty[$

donc $\left|\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+t^2}}\right| \leq \left|\frac{e^{-at}}{\sqrt{t+t^2}}\right|$ d'après 3. $t \mapsto \left|\frac{e^{-at}}{\sqrt{t+t^2}}\right|$ est intégrable

sur $]0,+\infty[$ d'où F est continue sur $]a,+\infty[$.

En faisant $a \to 0$ on obtient que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

5- Soit $a>0$.

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t+t^2}}\right| = \left|-t\frac{e^{-tx}}{\sqrt{t+t^2}}\right| = t\frac{e^{-tx}}{\sqrt{t+t^2}} \leq t\frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} = \sqrt{t}\,e^{-tx}$$

pour $t \in]0,1[$

$$t\frac{e^{-tx}}{\sqrt{t+t^2}} \leq t\frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} = \sqrt{t}\,e^{-tx} \leq \sqrt{t}$$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ intégrable sur $]0,1[$

car $\sqrt{t} \leq \sqrt{t+t^2}$ donc $\frac{1}{\sqrt{t+t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$

pour $t \in [1,+\infty[$

$\sqrt{t+t^2} \geq \sqrt{t^2} = t$ donc $\frac{1}{\sqrt{t+t^2}} \leq \frac{1}{t}$

donc $t\frac{e^{-tx}}{\sqrt{t+t^2}} \leq e^{-tx}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$

donc on peut majorer $\left|\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right| \leq g(t)$ intégrable.

donc F est dérivable sur $]a,+\infty[$, en faisant $a \to 0$
on a que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

6. D'après 4 F est continue sur $]0,+\infty[$ or $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n > 0$
donc

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = F(\lim_{n\to+\infty} x_n) = F(+\infty)$$

$$F(x_n) = \int_{]0,+\infty[} f(x_n,t)\, d\lambda(t) = \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-tx_n}}{\sqrt{t+t^2}}\, d\lambda(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc F a une limite en $+\infty$

7. Pour N assez grand $\frac{e^{-tx_n}}{\sqrt{t+t^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{t+t^2}}$

de plus pour $i<j$ $x_i \geq x_j$, pour $t>0$

$e^{-tx_i} \leq e^{-tx_j}$ i.e $\frac{e^{-tx_n}}{\sqrt{t+t^2}}$ est croissante

et $\frac{e^{-tx_n}}{\sqrt{t+t^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{t+t^2}}$ donc le théorème de convergence

monotone s'applique et $\lim_{n\to+\infty} \int_{]0,1]} \frac{e^{-tx_n}}{\sqrt{t+t^2}}\,dt = \int_{]0,+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-tx_n}}{\sqrt{t+t^2}}\,dt$

$= \int_{]0,+\infty[} \frac{1}{\sqrt{t+t^2}}\,dt = +\infty$

d'après 2, d'où F admet une limite en 0 qui est $+\infty$.

Exercice 8.4

1. Soit $n \in \mathbb{N}$

$f_n(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)^n$

$\int_{]0,1]} \cos\left(\frac{1}{x}\right)^n dx \leq \int_{]0,1]} 1^n\,dt = 1$ donc f_n est intégrable pour tout n.

2. posons $x = \frac{1}{\pi}$ donc $f_n\left(\frac{1}{\frac{1}{\pi}}\right) = \cos(\pi)^n = (-1)^n$

3. $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 1 \iff \frac{1}{x} = k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$

$\iff \frac{1}{k\pi} = x$

donc $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| < 1 \implies x \neq \frac{1}{k\pi}$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$\implies$ évident.

4. si $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| < 1$ donc $\cos\left(\frac{1}{x}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

i.e $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ne converge pas vers la fonction nulle ssi $x = \frac{1}{k\pi}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

i.e sur l'ensemble $N := \{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{N}^*\}$ d'après 3.

Cet ensemble est dénombrable donc de mesure nulle, d'où la conclusion.

5. $J_n = \int_{]0,1]} f_n\,d\lambda$ $\lim_{n\to+\infty} \int_{]0,1]} f_n\,d\lambda = \int_{]0,1]} \lim_{n\to+\infty} f_n\,d\lambda$

d'après le théorème de convergence dominée, comme $\forall n$ f_n est intégrable et dominé par une fonction intégrable.

De plus $\int_{]0,1]} f_n\,d\lambda = \underbrace{\int_N f_n\,d\lambda}_{=0} + \int_{]0,1]\setminus N} f_n\,d\lambda$

car de mesure nulle

D'où $\int_{]0,1]\setminus N} \lim_{n\to+\infty} f_n\,d\lambda = \int_{]0,1]\setminus N} 0\,d\lambda = 0$

Donc J_n converge vers 0.

Exercice 8.5

1. Soit $t \in]-1,1[$ si $t \leq 0$ alors $f(t,x) = 0 \ \forall x$ d'où f est intégrable.

supposons donc $t > 0$ étudions donc

$$f(t,x) = \begin{cases} \frac{4}{t^2} x & \text{si } x \in [0, \frac{t}{2}] \\ \frac{4}{t^2}(t-x) & \text{si } x \in]\frac{t}{2}, t] \\ 0 & \text{si } x \in]t, 1] \end{cases}$$

$\frac{4}{t^2} x \leq \frac{4}{t^2} \frac{t}{2} = \frac{2}{t}$ d'où

$\int_{[0,\frac{t}{2}]} \frac{4}{t^2} x \, dx \leq \int_{[0,\frac{t}{2}]} \frac{2}{t} dx = \frac{t}{2} \frac{2}{t} = 1$

pour $x \in]\frac{t}{2}, t]$

$\frac{4}{t^2}(t-x) \leq \frac{4}{t^2} \frac{t}{2} = \frac{2}{t}$

$\int_{]\frac{t}{2},t]} \frac{4}{t^2}(t-x) \, dx \leq \int_{]\frac{t}{2},t]} \frac{2}{t} dx = \frac{2}{t} \frac{t}{2} = 1$

pour $x \in]t,1]$

$\int_{]t,1]} 0 \, dx = 0$

donc $\int_{[0,1]} f(t,x) \, d\lambda = \int_{[0,\frac{t}{2}]} f(t,x) dx + \int_{]\frac{t}{2},t]} f(t,x) dx + \int_{]t,1]} f(t,x) dx$

$\leq 1 + 1 + 0 = 2$

donc $x \mapsto f(t,x)$ est intégrable. $\forall t \in]-1,1[$

2. OK

3. Soit $x \in [0,1]$ si $t \to 0$ donc pour $t < x$ $f(t,x) = 0$ d'où la conclusion

4. Pour t fixé $\int_{]0,1[} f(t,x) \, d\lambda(x)$

$= \int_{(0,\frac{t}{2}]} \frac{4}{t^2} x \, dx + \int_{]\frac{t}{2},t]} \frac{4}{t^2}(t-x) \, dx + \int_{]t,1]} 0 \, dx$

$= \left[\frac{2x^2}{t^2}\right]_0^{\frac{t}{2}} + \int_{]\frac{t}{2},t]} \frac{4}{t} - \frac{4}{t^2} x \, dx + 0$

$= \frac{2 \frac{t^2}{4}}{t^2} + \left[\frac{4}{t} x - \frac{2x^2}{t^2} \right]_{\frac{t}{2}}^{t}$

$= \frac{1}{2} + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} = 1$ constante $\forall t > 0$

donc $F(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 1 \neq F(0) = 0$

On a vérifié mesurabilité de $x \mapsto f(t,x)$ et continuité de $t \mapsto f(t,x)$ donc il nous reste à trouver $x \mapsto g(x)$ tq

$|f(t,x)| \leq g(x) \quad \forall x, t$

On cherche $\sup_t f(t,x)$ pour x fixé

le max de $t \mapsto f(t,x)$ est lorsque $x = \frac{t}{2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2x}$

donc la fonction dominante g doit vérifier

$\forall x \in [0,1] \quad g(x) \geq \frac{1}{2x}$ qui n'est pas intégrable, d'où

le théorème de continuité n'est pas vérifier.

<u>Exercice 8.7</u>

1 res. Born.

$u(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-t)^2} f(t) \, d\lambda(t)$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Or f est borné donc $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tq $|f(t)| \leq M \quad \forall t \in \mathbb{R}$

donc $\left| e^{-(x-t)^2} f(t) \right| \leq M e^{-(x-t)^2}$ où $e^{-(x-t)^2}$ est intégrable.

donc $\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-t)^2} f(t) \, d\lambda(t) \leq M \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-t)^2} d\lambda t$

donc u est bien définie.

2. $a > 0$

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$ soit $x \in [-a, a]$

$$\begin{aligned} -(x-t)^2 = -x^2 + 2xt - t^2 &= -t^2 + 2xt - x^2 \\ &\leq -t^2 + 2a|t| - x^2 \\ &\leq -t^2 + 2a|t| \quad \text{car } -x^2 \text{ nég.} \end{aligned}$$

(b) Or $2a|t|$ est positive pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $-\frac{t^2}{2}$ est négative pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc le max est en

$\max_t -\frac{t^2}{2} + 2a|t|$

$$-\frac{t^2}{2} + 2a|t| = 0 \iff 2a|t| = \frac{t^2}{2} \iff \begin{cases} t = 0 \text{ ou} \\ -\frac{|t|}{2} + 2a = 0 \iff |t| = a \end{cases}$$

$$-\frac{t^2}{2} + 2a|t| - c = 0$$

$$\Delta = 4a^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)(-c) = 4a^2 - 2c$$

$$4a^2 - 2c = 0 \iff 4a^2 = 2c \iff c = 2a^2$$

donc le max est $2a^2$

d'où

$$-\frac{t^2}{2} + 2a|t| \leq 2a^2$$

donc $\forall t \in \mathbb{R}$ $e^{-\frac{t^2}{2} + 2a|t|} \leq e^{2a^2}$ donc la fonction est bien bornée.

c) $x \mapsto e^{-(x-t)^2} f(t)$ est continue sur $]-a,a[$

$t \mapsto e^{-(x-t)^2} f(t)$ est mesurable car produit des fonctions mesurable.

de plus $e^{-(x-t)^2} f(t) \leq M e^{-t^2 + 2a|t|}$ qui est intégrable

donc u est continue sur $]-a,a[$

En faisant tendre a vers $+\infty$, on obtient que u est continue sur $\mathbb{R}$.

3. $$\frac{\partial}{\partial x} e^{-(x-t)^2} f(t) = f(t)(-2x + 2t) e^{-(x-t)^2}$$

$x \mapsto (-2x + 2t) f(t,x)$ est continue

$t \mapsto (-2x + 2t) f(t,x)$ est mesurable

Soit $a > 0$, soit $x \in]-a,a[$

$$\left| f(t)(-2x + 2t) e^{-(x-t)^2} \right| \leq M |-2x + 2t| e^{-t^2 + 2a|t|}$$

$$\leq M (2a + |2t|) e^{-t^2 + 2a|t|}$$

$$\int \left| f(t)(-2x + 2t) e^{-(x-t)^2} \right| \leq M \int (2a + |2t|) e^{-t^2 + 2a|t|} \, dt$$

$$= M \left[e^{-t^2 + 2a|t|} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$ intégrable

donc u est de classe C^1