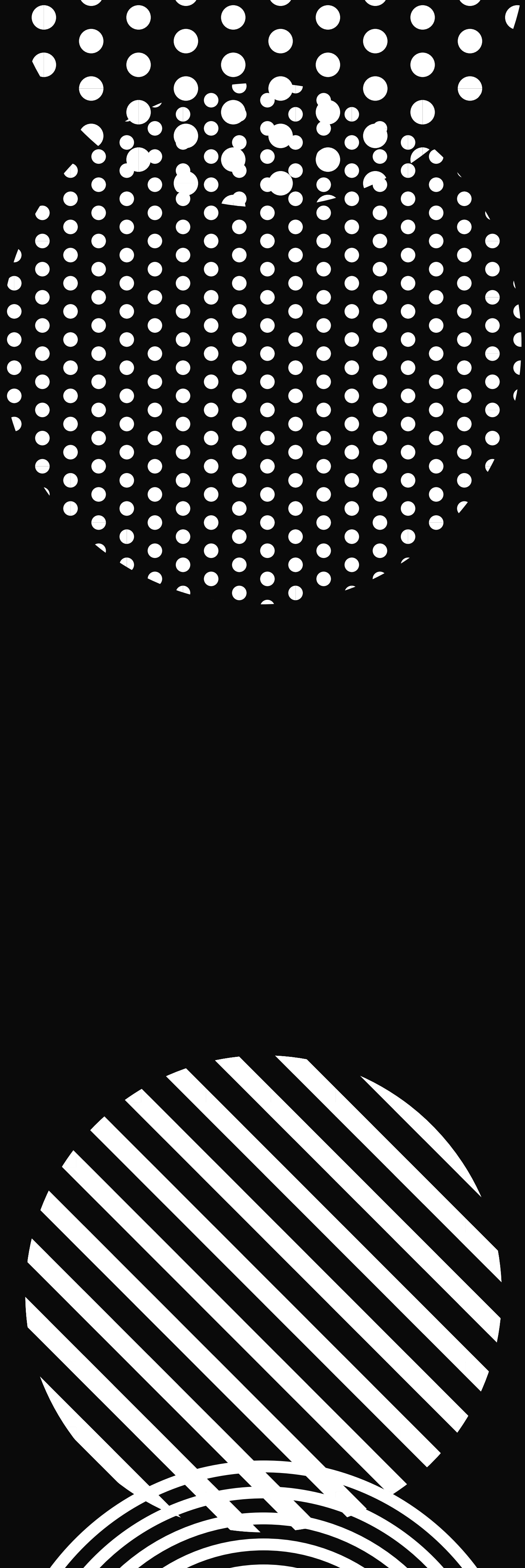


Exercice 7.1

1. Soit $t \in [1, +\infty[$,

$$\frac{t}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Par continuité de $x \longmapsto \dfrac{1}{t^2 + \cos^2(x)}$ en 0

On a $f_n(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1}{1+t^2}$

2. $\forall n, t \in [1, +\infty[$ $\cos^2(\frac{t}{n}) \in [0, 1]$

donc $0 \geqslant t^2 + \cos^2(\frac{t}{n}) \geq t^2$

d'où $0 \leq \dfrac{1}{t^2 + \cos^2(\frac{t}{n})} \leq \dfrac{1}{t^2}$ car $x \longmapsto \frac{1}{x}$ décroissant sur $]0, +\infty[$

3. Par le thm de cv. dominée d'après 2.

$$J_n = \int_{[1, +\infty[} f_n \, dt \longrightarrow \int_{[1, +\infty[} \lim_{n \to +\infty} f_n \, dt$$

$$= \int_{[1, +\infty[} \frac{1}{1+t^2} \, dt$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \, dt$$

$$= \left[\arctan(t) \right]_1^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 7.2

1. $J_n = \int_{[1, +\infty[} e^{-t^n} \, d\lambda(t)$

Soit $n \geq 0$, soit $f_n(t) = e^{-t^n}$ pour $t \in [1, +\infty[$

- f_n mesurable car continue
- f_n est positive

Soit $t \geq 1$

- $t = 1$: alors $f_n(1) = \frac{1}{e}$
- $t \geq 1$: alors $f_n(t) = e^{-t^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$|e^{-t^n}| \leq e^{-t} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Soit $t > 1$ alors $t^n \geq t$ donc $-t^n \leq -t$ donc $e^{-t^n} \leq e^{-t}$

donc d'après le théorème de convergence dominé

$$J_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{[1,+\infty[} \frac{1}{e} \mathbb{1}_{\{1\}} \, dt = 0$$

2. $\forall t \geq 1 \quad \dfrac{t^2}{t^4 + nt} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$\frac{t^2}{t^4 + nt} \leq \frac{t^2}{t^4} = \frac{1}{t^2} \quad \forall t \geq 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$$

et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ int. sur $[1,+\infty[$

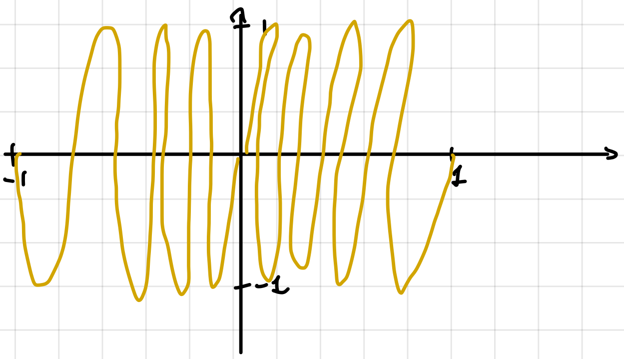
Donc d'après le TCD

$$K_n = \int_{[1,+\infty[} \frac{t^2}{t^4+nt} \, d\lambda(t) \longrightarrow \int_{[1,+\infty[} 0 \, dt = 0$$

Exercice 7.3

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right)^n & x \in]-1,0[\cup]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



1) Pour $x \in]-1,1[\setminus \{0\}$

$|\sin(\frac{1}{x})^n| \leq 1$ d'où $|\sin(\frac{1}{x})^n| \leq \mathbb{1}_{]-1,1[}(x)$

Or $\mathbb{1}_{]-1,1[}$ est intégrable.

$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 1 \iff \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{x} = \frac{\pi + 2k\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\pi + 2k\pi} = x$$

Notons $N = \{x : x = \frac{2}{\pi + 2k\pi}, k \in \mathbb{Z}\}$ donc N est dénombrable.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus N$ $|\sin(\frac{1}{x})| < 1$ donc $|\sin(\frac{1}{x})^n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc N est dénombrable donc N est de mesure nulle.

3. Soit $J_n = \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda$

Par TCD, $J_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 = \int_{\mathbb{R}} \lim f_n \, d\lambda$

<u>Exercice 7.6</u>

1. $\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = [2\sqrt{x}]_{\frac{1}{n}}^{1} = 2 - 2\sqrt{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$

Donc notons $f :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $f = g$

$f, g \in \mathcal{L}^1(]0,1])$ mais $\int_0^1 |f \cdot g(x)| dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$

donc $fg \notin \mathcal{L}^1(]0,1])$

4. Soit $f \in \mathcal{L}^1([0,+\infty[)$

Donc $\int_{\mathbb{R}_+} |f| \, d\lambda < +\infty$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $\int_{\mathbb{R}_+} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}} 0 \, d\lambda + \int_{\mathbb{N}} x \, d\lambda$

$= 0 + 0$ car $\mathbb{N}$ de mesure nul.

donc f intégrable mais f n'est pas bornée:

Car $M > 0$ $\exists x \in \mathbb{N}$ tq $x > M$ et donc $f(x) = x > M$.

5. Soit $f \in \mathcal{L}^1([0,+\infty[)$ tq $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

i.e. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists L \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \geq L \ |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Supposons que ℓ positive. Soit $\varepsilon \in]0, \ell[$, donc on trouve L donc $\forall x > L$

$f(x) > \ell - \varepsilon$

$$\int_{\mathbb{R}_+} f d\lambda = \int_{[0,L[} f d\lambda + \int_{[L,+\infty[} f d\lambda \geq \int_{\mathbb{R}_+} f d\lambda + (\ell - \varepsilon) \cdot \lambda([L,+\infty[)$$

$$= \ell \cdot \lambda([L,+\infty[) - \varepsilon \cdot \lambda([L,+\infty[)$$

Exercice 7.4

$f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$

notons $\varphi_n = \frac{1}{n} \int_{[0,n]} f(t) d\lambda t$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[k,k+1]} f(t) dt$$

Soit $\varepsilon > 0$ donc $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall x \geq N \ |f(x) - \ell| < \varepsilon$

donc $\forall n \geq N \ \left| \int_{[n,n+1]} f(t) d\lambda(t) - \ell \right| \leq \int_{[n,n+1]} |f(t) - \ell| d\lambda(t) \leq \int_{[n,n+1]} \varepsilon \, d\lambda(t) = \varepsilon$

donc $\frac{1}{N-n} \sum_{k=N}^{n} \int_{[n,n+1]} f(t) d\lambda(t) = n - N \ell \frac{1}{n-N} \Rightarrow \ell$

donc $\to \ell \qquad \frac{n-N}{n} \longrightarrow 1$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{[k,k+1]} f(t) dt$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[k,k+1]} f(t) dt = \underbrace{\frac{1}{n} \overbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \int_{[k,k+1]} f(t)}^{\text{fini}}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=N}^{n-1} \int_{[k,k+1]} f(t) dt}_{\to \ell}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ $\quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f(t) \leq l$ borne de f

donc $\quad n f(t) e^{-nt} \leq n l e^{-nt} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$ car $e^{-nt} \geq 0 \ \forall t$.

$$\int_{[0,+\infty[} n f(t) e^{-nt} \, dt \leq \int_{[0,+\infty[} n l e^{-nt} dt$$
$$= \left[-l e^{-nt} \right]_0^{+\infty}$$
$$= -l \left[e^{-nt} \right]_0^{+\infty}$$
$$= -l \left(e^{-n(+\infty)} - e^{-n \cdot 0} \right)$$
$$= -l(0-1) = l$$

$$\int_{[0,+\infty[} n f(t) e^{-nt} d\lambda(t)$$

$t = \frac{x}{n} \qquad dt = \frac{1}{n} dx \quad$ cas $\quad dx = n\, dt$

$$\int_{[0,+\infty[} f\left(\frac{x}{n}\right) e^{-x} d\lambda(x)$$

On a $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f\left(\frac{x}{n}\right) e^{-x} \leq l e^{-x} \quad$ où $l e^{-x}$ est positive et intégrable sur

$$\int_{[0,+\infty[} l e^{-x} d\lambda(x) = l$$

donc $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \int_{[0,+\infty[} f\left(\frac{x}{n}\right) e^{-x} d\lambda(x)$

$$= \int_{[0,+\infty[} \lim_{n \to +\infty} f\left(\frac{x}{n}\right) e^{-x} d\lambda(x) = \int_{[0,+\infty[} f(0) e^{-x}$$

$$= f(0) \int_{[0,+\infty[} e^{-x} d\lambda(x) = f(0)$$

Exercice 7.5

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que f est intégrable i.e

$\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$ existe

de plus $\quad e^{-nx^2} \leq 1$

donc $\quad \int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2} |f(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$ finie

donc $\quad g_n(x) = e^{-nx^2} f(x)$ est intégrabl.

2. Or g_n est dominé par $x \mapsto |f(x)|$ qui est intégrable donc le théorème de convergence dominée s'applique et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} e^{-nx^2} f(x)\, dx$$

$$= \int_{[0,1]} \lim_{n\to+\infty} e^{-nx^2} f(x) dx$$

$$= \int_{\{0\}} \lim_{n\to+\infty} e^{-nx^2} f(x) dx + \int_{]0,1]} \lim_{n\to+\infty} e^{-nx^2} f(x) dx$$

$$= 0 \qquad + \int_{]0,1]} \lim_{n\to+\infty} e^{-nx^2} f(x) dx$$

$$= \int_{]0,1]} 0\, dx = 0$$

Exercice 7.8

1. Soit $k \in \mathbb{N}$

$$x^{a-1} x^{bk} = \frac{x^a}{x} x^{bk} \leq \frac{x^a}{x} \quad \text{car} \quad x^{bk} \leq 1 \ \forall x \in]0,1[$$

$$\int_{]0,1[} \frac{x^a}{x} dx = \int_{]0,1[} x^{a-1} dx = \left[\frac{x^a}{a} \right] = \frac{1}{a}$$

donc le théorème le convergence dominé s'applique

$$J_k = \int_{]0,1[} x^{a-1} x^{bk} d\lambda(x) = \int_{]0,1[} x^{a-1+bk} d\lambda(x) = \left[\frac{x^{a+bk}}{a+bk} \right]_0^1 = \frac{1}{a+bk}$$

Exercice 7.8

$a>0 \quad b>0$

1. Soit $k \in \mathbb{N}$

$$J_k = \int_{]0,1[} x^{a-1} x^{bk} d\lambda(x)$$

$$= \int_{]0,1[} x^{a-1+bk} d\lambda(x)$$

$$= \left[\frac{x^{a+bk}}{a+bk} \right]_0^1 = \frac{1}{a+kk}$$

2. $f_n :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{a-1} x^{bk} \qquad \forall x \in]0,1[$$

(a) Soit $x \in]0,1[$

$$f_n(x) = x^{a-1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{bk} \quad \text{où} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{bk} = \frac{1}{1+x^b}$$

donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x^{a-1}}{1+x^b}$

$\forall x \in]0,1[\quad 1+x^{\beta} > 1 \quad$ d'où $\quad \dfrac{1}{1+x^{\beta}} < 1$

$\iff \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x^{\beta}} < x^{\alpha-1}$ car positive.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{\beta k} \leq (-1)^0 x^0 = 1$$

d'où $\left|f_n(x)\right| = \left|x^{\alpha-1} \sum (-1)^k x^{\beta k}\right| \leq x^{\alpha-1}$

c) $\int_{]0,1[} x^{\alpha-1} d\lambda = \left[\dfrac{x^{\alpha}}{\alpha}\right]_0^1 = \dfrac{1}{\alpha}$ donc $x \mapsto x^{\alpha-1}$ est intégrable sur $]0,1[$

3)
$$\int_{]0,1[} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^{\beta}} d\lambda(x) = \int_{]0,1[} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{\alpha-1} x^{\beta k} \, d\lambda$$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \int_{]0,1[} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^{\alpha-1} x^{\beta k} d\lambda$ par TCD

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \int_{]0,1[} (-1)^k x^{\alpha-1} x^{\beta k} d\lambda(x)$ car f_n cv.

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_{]0,1[} x^{\beta k+\alpha-1} d\lambda(x)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[\frac{x^{\beta k+\alpha}}{\beta k+\alpha}\right]_0^1$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\beta k+\alpha}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\beta k+\alpha}$$