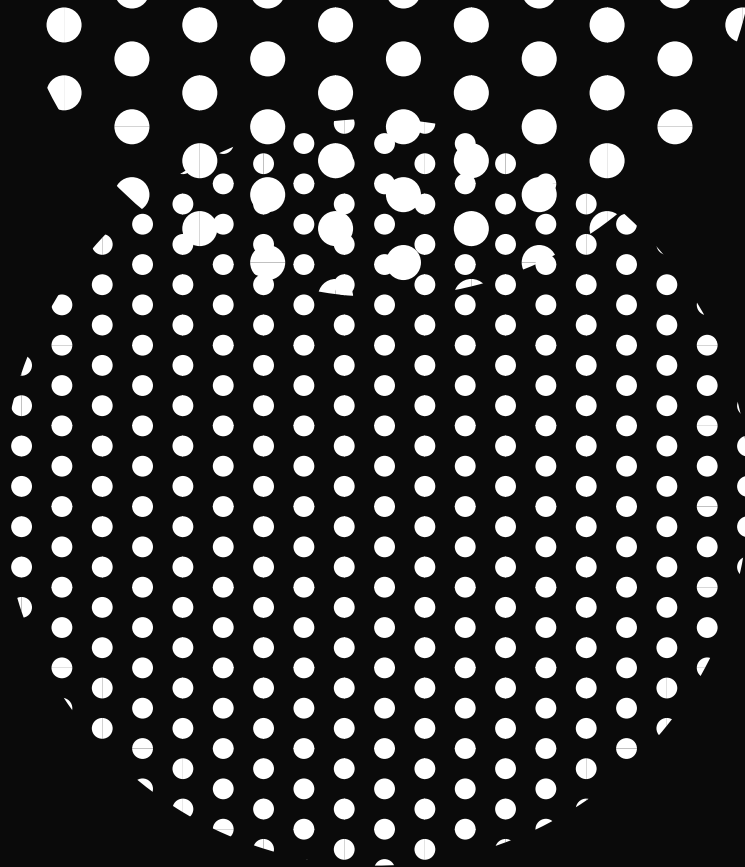




exercice 5.1

1. A et B sont Lebesgue mesurable en tant qu'un intervalle et union des intervalles

$$2. \quad \lambda(A) = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lambda(B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda(A \cap B) = \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B) = \frac{7}{6}$$

$$\lambda(A) + \lambda(B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4 + 3}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\lambda(A \cup B) = 1$$

$$3. \quad \lambda(A \cup B) = \lambda((A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup A \cap B)$$

$B \setminus (B \cap A) = B \cap (B \cap A)^c$ est mesurable car A et B le sont.

Donc

$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A \setminus (A \cap B)) + \lambda(B \setminus (A \cap B)) + \lambda(A \cap B)$$

$$= \lambda(A) - \lambda(A \cap B) + \lambda(B) - \lambda(A \cap B) + \lambda(A \cap B)$$

$$= \lambda(A) + \lambda(B) - \lambda(A \cap B)$$

On voit bien que $A \setminus (A \cap B) \cup A \cap B = A$ qui sont disjoint
d'où $\lambda(A \setminus (A \cap B) \cup A \cap B) = \lambda(A \setminus (A \cap B)) + \lambda(A \cap B) = \lambda(A)$
d'où $\lambda(A \setminus (A \cap B)) = \lambda(A) - \lambda(A \cap B)$

Identiquement pour $B \setminus (A \cap B)$

$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A) - \lambda(A \cap B) + \lambda(B) - \lambda(A \cap B) + \lambda(A \cap B)$$

$$= \lambda(A) + \lambda(B) - \lambda(A \cap B)$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in \emptyset\} \\ = \emptyset$$

Exercice 5-2

1. $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ $f: E \rightarrow \mathbb{R}$

et $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ qui coïncide p.p. avec f
montrer que g est mesurable.

Lemme (de Completeness): Si $X \subset \mathbb{R}$ est de mesure extérieure nulle, alors X est mesurable de mesure nulle.

Soit B tq $\lambda^*(B) = 0$
Soit A ,
$$\lambda^*(A) = \underbrace{\lambda^*(A \cap B)}_{=0} + \lambda^*(A \cap B^c)$$

$$\lambda^*(X \setminus \emptyset) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{car } A \cap B \subset B \\ \text{donc } \lambda^*(A \cap B) \leq \lambda^*(B) = 0 \end{array}$$

$$\lambda^*(A) \leq \lambda^*(A \cap B^c)$$

et $\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap B^c)$ car $A \cap B^c \subset A$
donc $\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap B^c)$
alors
$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A \cap B^c)$$

Donc B est mesurable.

Soit A mesurable

donc $f^{-1}(A)$ est mesurable

$$\lambda^*(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

$$\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} =: \mathcal{D}$$

$$g^{-1}([a, +\infty[) = g^{-1}([a, +\infty[) \cap \mathbb{R}$$

$$= g^{-1}([a, +\infty[) \cap (\mathcal{D} \cup \mathcal{D}^c)$$

$$= \underbrace{(g^{-1}([a, +\infty[) \cap \mathcal{D})}_{\substack{\text{mesure nulle} \\ \text{donc mesurable}}} \cup \underbrace{(g^{-1}([a, +\infty[) \cap \mathcal{D}^c)}_{\substack{\text{par def de } \mathcal{D}}}$$

$$= \underbrace{(g^{-1}([a, +\infty[) \cap \mathcal{D})}_{\substack{\text{mes} \\ \text{car mes} = 0}} \cup \underbrace{(f^{-1}([a, +\infty[) \cap \mathcal{D}^c)}_{\substack{\text{mes.} \\ \text{par hyp}}} \underbrace{\cap \mathcal{D}^c}_{\substack{\text{comp} \\ \text{d'un mesurable}}}$$

Donc $g^{-1}([a, +\infty[)$ est mesurable.

2. (a) $\Rightarrow$ (b) d'après 1

(b) $\Rightarrow$ (a)

On suppose $\forall \varepsilon > 0 \quad \lambda(\{\alpha \mid |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{\alpha \mid |f(x) - g(x)| \geq \frac{1}{n}\} = \{\alpha \mid f(x) \neq g(x)\}$$

exercice 5-3

1. Soit $A \in \mathcal{C}$ $\mathbb{R} \in \mathcal{C}$ car $\mathbb{R}^c = \emptyset$ est dénombrable

alors A est dénombrable ou A^c est dénombrable

A^c est dénombrable ou $(A^c)^c = A$ est dénombrable
donc $A^c \in \mathcal{C}$

Soit une famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}$

Alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est dénombrable ou

$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^c$ est dénombrable

" $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^c$ s'il y a au moins
un A_n dénombrable
alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^c$ est dénombrable

S'il n'y a aucune partie dénombrable
 A_n^c alors $\forall n \in \mathbb{N}$ A_n est dénombrable
d'où $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est dénombrable.

Alors $\mathcal{C}$ est une tribu.

2. Soit $A \subset \mathcal{E}$

alors A est dénombrable ou A^c est dénombrable.

Supposons que A est dénombrable (si ce n'est pas le cas, alors A^c est dénombrable et on fera la preuve identique pour A^c).

$A \subset \mathbb{R}$. Or $\mathcal{I}$ est un tribu engendré par les parties finies de $\mathbb{R}$ alors si on prends une famille quelconque des finies dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathcal{I}$) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{I}$

donc on peut trouver une famille $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{I}$ tq $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = A$.

et donc $A^c = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right)^c \in \mathcal{I}$

Or cela reste vrai dans le cas de A^c dénombrable donc $\mathcal{E} \subset \mathcal{I}$

$\mathcal{I}$ est engendré par les parties finies. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les parties finies de $\mathbb{R}$. Or une partie fini est aussi dénombrable donc $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$

$\mathcal{I}$ est l'intersection de toutes tribus qui contiennent $\mathcal{E}$. Or $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ donc $\mathcal{I} \subset \mathcal{E}$.

Donc $\mathcal{I} = \mathcal{E}$.

3. $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}$ car toute partie finie appartient au Borélien ^{tribu}

$]0,1[\in \mathcal{B}$ n'est pas dénombrable.

$]0,1[^c =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ n'est pas dénombrable.

Donc $]0,1[\notin \mathcal{E} = \mathcal{I}$ donc $\mathcal{B} \not\subset \mathcal{I}$

4. Soit f injective. Alors $\forall x, y \in \mathbb{R}$ tq $x \neq y$

$$f(x) \neq f(y)$$

Supposons qu'on munit f de tribu $\mathcal{I}$
soit $A \subset \mathcal{I}$. Supposons que A est dénombrable
alors $f^{-1}(A)$ l'est aussi car f injective donc $f^{-1}(A)$ est mesurable.

Supposons A n'est pas dénombrable, alors A^c l'est.

$f^{-1}(A)^c = f^{-1}(A^c)$ dénombrable donc

$f^{-1}(A)^c \in \mathcal{I}$ donc $f^{-1}(A)$ aussi donc

$f^{-1}(A)$ est aussi mesurable.

Donc f est mesurable.

donnerup
dois pas prouver f injective
in your head
do your work



$$5. \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 1 & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

Alors $\{0\}$ est mesurable dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{T}$
mais

$$f^{-1}(\{0\}) =]-\infty, 0] \in \mathcal{B} \text{ \& } \mathcal{T}$$

Exercice 5.4

$$1. \quad \mathcal{J}_a(\emptyset) = 0 \quad \text{car } a \notin \emptyset$$

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{L}$ 2 à 2 disjoints.

$$\mathcal{J}_a\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = 0 \quad \text{si } \forall n \in \mathbb{N} \quad a \notin E_n$$

si $a \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ alors $\exists k \in \mathbb{N}, a \in E_k$ car

$$E_n \text{ 2 à 2 disjoints donc } \mathcal{J}_a(E_k) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{k\} \quad \mathcal{J}_a(E_n) = 0$$

$$\text{D'où } \mathcal{J}_a\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = 1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_a(E_n)$$

$$2. \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mathcal{J}_a(x) = f(a)$$

3. Soit $A \in \mathcal{L}$

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \in A \text{ et } 1 \in A \\ \frac{1}{2} & \text{si } (-1 \in A \text{ et } 1 \notin A) \text{ ou } (-1 \notin A \text{ et } 1 \in A) \\ 0 & \text{si } -1 \notin A \text{ et } 1 \notin A. \end{cases}$$

Exercice 5.5

$$1. \quad \lambda(A-n) \cap [0,1] = \lambda(A \cap [0,1+n]) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{donc } \lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A \cap [0,1+n]\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda(A \cap [0,1+n]) \\ = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda(A-n) \cap [0,1]$$

2. Si $(A-n) \cap [0,1]$ était deux à deux disjoints, alors on aurait

$$\lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (A-n) \cap [0,1]\right) \leq 1 \quad \text{car } \forall n \in \mathbb{N} \quad (A-n) \cap [0,1] \subset [0,1]$$

$$\text{mais on a } \lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (A-n) \cap [0,1]\right) > 1$$

Donc ils ne sont pas deux à deux disjoints.

$$3. \quad \exists m \neq n \quad \text{tq} \quad x = a - m = b - n \\ \Rightarrow a - b = m - n \in \mathbb{Z}$$

$$1. \quad \{4, 5\} \quad \{2, 3\}, \quad \{2, 3, 4, 5\}, \quad \mathbb{N}$$

$$2. \quad f'(n) = n - 2$$