



Exercice 4.1

$$[a, b] = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}}]b, +\infty[\right)^c \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}}]a - \frac{1}{n}, +\infty[\right)$$

Or pour tout $n \geq 1$, $]a - \frac{1}{n}, +\infty[$ est mesurable donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}}]a - \frac{1}{n}, +\infty[$ comme intersection dénombrable. $]b, +\infty[$ est mesurable donc $]b, +\infty[^c$ aussi et donc $[a, b]$ l'est par intersection finie de mesurables.

Exercice 2.2

$$E \subset \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{R} \quad kE = \{kx : x \in E\}$$

$$1. \quad \lambda^*(kE) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \mid kE \subset \bigcup_{i=1}^n]a_i, b_i[\right\}$$

Avec $k=0$ on a $\lambda^*(kE)=0$ donc
supposons $k \neq 0$.

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \mid kE \subset \bigcup_{i=1}^n]a_i, b_i[\right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \mid E \subset \frac{1}{k} \bigcup_{i=1}^n]a_i, b_i[\right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \mid E \subset \bigcup_{i=1}^n]\frac{a_i}{k}, \frac{b_i}{k}[\right\} \\ &= \left\{ k \underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\frac{b_i - a_i}{k} \right)}_{\substack{\lambda^*(E) \\ \text{un res. positive}}} \mid E \subset \bigcup_{i=1}^n]\frac{a_i}{k}, \frac{b_i}{k}[\right\} \end{aligned}$$

2. Supposons que E est mesurable.

$$\text{Donc } \forall A \subset \mathbb{R} \quad \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$$

$$A = (A \cap kE) \cup (A \cap (kE)^c)$$

$$\lambda^*(A) \leq \lambda^*(A \cap kE) + \lambda^*(A \cap (kE)^c)$$

Il nous reste à montrer que

$$\lambda^*(A \cap kE) + \lambda^*(A \cap (kE)^c) \geq \lambda^*(A)$$

1. Soit $k \geq 0$. Il existe $(\alpha_i, \beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un recouvrement de E tq
 $\lambda^*(E) \leq \sum \beta_i - \alpha_i \leq \lambda^*(E) + \frac{\varepsilon}{k}$

$$\therefore \lambda^*(E) \leq \sum k\beta_i - k\alpha_i \leq k\lambda^*(E) + \varepsilon$$

Montrons que $\{k\beta_i - k\alpha_i\}$ recouvre kE .

Soit $y \in E$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tq $y = xz$ $\exists i \in \mathbb{N}$ tq $z \in [\alpha_i, \beta_i]$
 donc $y \in [k\alpha_i, k\beta_i]$

$$\text{donc } \lambda^*(kE) \leq \sum k\beta_i - k\alpha_i \leq k\lambda^*(E)$$

Puis on applique le même raisonnement à $E' = kE$ avec $k' = \frac{1}{k}$

2. Soit $A \subset \mathbb{R}$ montrons que

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap (kE)) + \lambda^*(A \cap (kE)^c) \text{ sachant que } \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$$

$$\text{ou que } \forall B \quad \lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap E) + \lambda^*(B \cap E^c)$$

Soit $A \subset \mathbb{R}$ posons $B = \frac{1}{k}A$ i.e $A = kB$

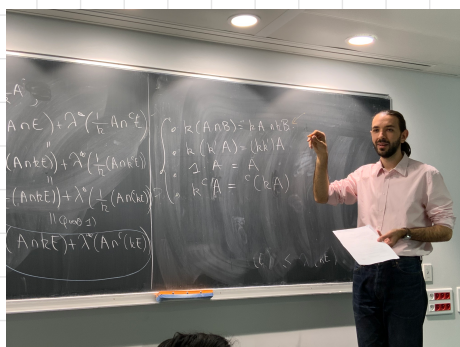
$$\text{On a } \lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap E) + \lambda^*(B \cap E^c)$$

$$\text{" } \lambda^*\left(\frac{1}{k}A\right) = \lambda^*\left(\frac{1}{k}(A \cap kE)\right) + \lambda^*\left(\frac{1}{k}(A \cap (kE)^c)\right)$$

$$\text{" } \left|\frac{1}{k}\right| \lambda^*(A) = \left|\frac{1}{k}\right| \left(\lambda^*(A \cap kE) + \lambda^*(A \cap (kE)^c) \right)$$

$$\Leftrightarrow \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap kE) + \lambda^*(A \cap (kE)^c)$$

Or A était arbitraire, donc c'est vrai pour tout $A \subset \mathbb{R}$, donc par définition kE est mesurable.



Exercice 4.4

1) Soient x, y, z tq xRy et yRz

(i) Alors $x - y \in \mathbb{Q}$ notons $y \in \mathbb{Q}$ et $y = x - y$
on sait que $-y \in \mathbb{Q}$ aussi, donc $-(x - y) = y - x \in \mathbb{Q}$
d'où yRx

(ii). $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$ d'où xRx

(iii) $x - z = \underbrace{(x - y)}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(y - z)}_{\in \mathbb{Q}}$ car xRy et yRz

donc $x - z \in \mathbb{Q}$ car deux nombres rationnels
d'où xRz

Donc R est bien une relation d'équivalence.

2)

a) Soient $n, m \in \mathbb{N}$

Soit $l \in E_n \cap E_m$

Donc $\exists e, e' \in E$

$$\text{tq } e + z_n = e' + z_m = l$$

Si l est rationnel, alors e et e' le sont aussi
donc e et e' sont de même classe
d'équivalence, donc $e = e'$ alors on a $z_n = z_m$
ce qui est impossible donc $E_n \cap E_m$ ne contient
pas des nombres rationnels

si l est irrationnel donc

$$e + z_n = e' + z_m \text{ donne}$$

$e - e' = z_m - z_n \in \mathbb{Q}$ car z_m et z_n
sont des rationnels, alors de
même e et e' sont de même
classe d'équivalence donc égaux ce
qui donne $z_n = z_m$ ce qui est impossible
alors $E_m \cap E_n = \emptyset$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq z_n \leq 1$
 $\forall x \in E, 0 \leq x \leq 1$ d'où

$$-1 \leq x + z_n \leq 2 \text{ d'où évidemment } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \subset [-1, 2]$$

Soit $l \in [0, 1]$ $z \in E$ est l'unique rationnel contenu dans E .

si $l \in \mathbb{Q}$ donc $\exists z_n \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ tq $l = z + z_n$
donc $l \in U E_n$

si $l \notin \mathbb{Q}$ alors l appartient à l'une des classes d'équivalences de nombres irrationnels.

tels nombres s'écrivent de manière

$\gamma + z$ où γ est un irrationnel et $z \in \mathbb{Q}$
donc $\exists \gamma$ et n tq $l = \gamma + z_n \in E_n$

D'où $l \in U E_n$ alors $[0, 1] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$

3.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$
alors $E_n = E + z_n$

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \quad \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$$

$$\lambda^*(E_n) = \lambda^*(E) \text{ car une translation}$$

donc E_n est mesurable

$$\text{Or } [0, 1] \subset \bigcup E_n \subset [-1, 2]$$

$$\text{donc } \lambda^*([0, 1]) \leq \lambda^*(\bigcup E_n)$$

$$\lambda^*([0, 1]) \leq \lambda^*([-1, 2]) = 3$$

$$\text{D'où } 1 \leq \lambda^*(\bigcup E_n) \leq 3$$

(b) D'après 2 (a) E_n sont 2 à 2 disjointes,
d'après 3 (a) $\forall n \in \mathbb{N}$ E_n est mesurable.
donc en combinant ces 2 faits, $\lambda^*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^*(E_n)$

$$(c) \text{ D'après (3) (b) } \lambda^*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^*(E_n)$$

$$\text{donc } 1 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^*(E_n) \leq 3$$

On a $\forall n \quad \lambda^*(E_n) = \lambda^*(E)$ donc tous E_n sont de la même mesure. $\lambda^*(E_n) > 0$ notons $m = \lambda^*(E)$
car $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^*(E_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m \geq 1 \neq 0$

mais $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^*(E_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m = \infty$ car m un nombre fixé non nul.

mais aussi $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^*(E_n) \leq 3$. Contradiction.

