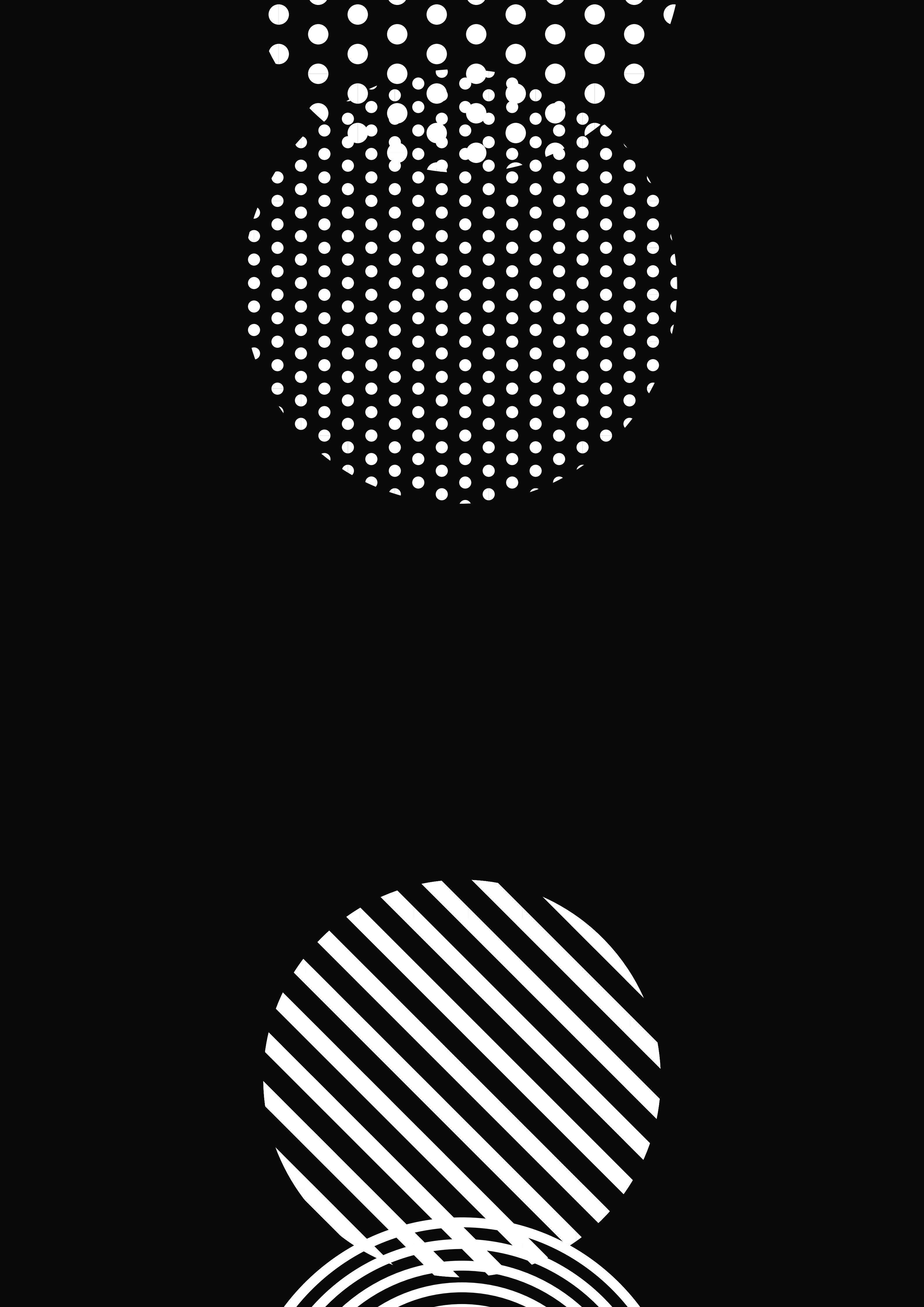

Exercice 3.1

1. Supposons que $A \cup B = B \cap C$

Soit $\underline{x \in A \cup B}$ alors $x \in B \cap C$ donc $x \in B$ et $x \in C$

$\Rightarrow x \in A$ ou $x \in B$

<u>cas 1 $x \in A$:</u>

et $x \in B$ par l'égalité. Or x était quelconque, donc $A \subset B$.

<u>cas 2 $x \in B$</u>

$x \in C$ donc $\underline{B \subset C}$

Alors $A \subset B \subset C$

2. $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$

$A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$
$B \subset A \cup B = A \cap B \subset A$ donc $A = B$

3) $\begin{cases} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{cases} \Rightarrow B \subset C$

Soit $x \in B$, or

$B \subset A \cup B = A \cup C$ donc

<u>cas 1)</u> $x \in A$ alors $x \in A \cap B$ donc $x \in A \cap C$ donc $x \in C$

<u>cas 2)</u> $x \in C$

Exercice 3.3

1 a) $\mathcal{P}(E)$ surjective donc $\exists x'$ tq $\varphi(x') = \emptyset$

Donc $x' \in E$ et $x' \notin \varphi = \emptyset(x')$

donc $x \in F$ droù F ne peut pas être vide.

b) Soit $x_0 \in E$ tq $\varphi(x_0) = F$

cas 1 $x_0 \in F$ alors $x_0 \notin \varphi(x_0) = F$ absurde

cas 2 $x_0 \notin F$ alors $x_0 \in \varphi(x_0) = F$ absurde.

donc F doit être forcément vide.

c) donc φ ne peut pas être surjective.

2) Par 1, φ ne peut pas être surjective, donc il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

Exercice 3.4

Montrons que $\mathbb{R}$ est non-dénombrable, il suffit de montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}$

$\mathcal{P}(E) \xrightarrow{\sim} Fun(E, \{0,1\}) = \{0,1\}^E$

Сам зробимо

Exercice 2

1.

1. Condition: $A_{m+1} \supset A_m \ \forall m$

$\Updownarrow$ $\lim\inf A_n = \lim\sup A_n \iff \lim\inf A_n \supset \lim\sup A_n$

A_n soit croissant/décroissant.

Supposons $\liminf_{n\to+\infty} A_n \supset \limsup_{n\to+\infty} A_n$

Soit $x \in \limsup_{n\to+\infty}$

3) $\left(\limsup_n A_n\right)^c = \left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} A_m\right)^c$

$$= \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} A_m^c = \liminf_n A_n^c$$

Exercice 3.4

2. $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ $\quad E = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\quad J_0 = [0,1]$

$J_n = [x_n, y_n]$ $\quad u_n = \frac{2x+y_n}{3}$ $\quad v_n = \frac{x_n+2y_n}{3}$

$$J_{n+1} = \begin{cases} [x_n, y_n] & \text{si } a_{n+1} = 0 \\ [v_n, y_n] & \text{si } a_{n+1} = 1 \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$J_n \cap J_{n+1} = \begin{cases} [x_n, u_n] & \text{si } a_{n+1} = 0 \\ [v_n, y_n] & \text{si } a_{n+1} = 1 \end{cases}$$

d'où $J_n \cap J_{n+1} = J_{n+1}$

D'où $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n = \lim_{n\to+\infty} J_n$ avec $J_n \neq \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$

donc J_n tend vers un singleton $\varphi(a)$

3. Pour tout a, pendant la construction de $\bigcap J_n$ tout choix de la réduction de l'intervalle est unique d'où tout intervale, (ie singleton) est unique d'où l'injectivité

4. On peut associer tout élément de E à un unique élément de $\mathbb{R}$ par l'injectivité d'après 3. mais E étant non dénombrable donne que $\mathbb{R}$ l'est aussi.

Exercice 3.5

1. Soient X, Y, Z tq XRY et YRZ

(i) $A\cap X = A\cap X$ donc XRX

(ii) $A\cap X = A\cap Y$ et $A\cap Y = A\cap Z$ donc $A\cap X = A\cap Z$
d'où XRZ

(iii) $A\cap Y = A\cap X$ donc YRX

Donc $\mathcal{R}$ est bien une relation d'équivalence

2. $\overline{\emptyset} = \{Y \subset E : A \cap Y = \emptyset\}$

$\overline{E} = \{Y \subset E : A \cap Y = A\}$

$\overline{A} = \{Y \subset E : A \cap Y = A\}$

$\overline{A^c} = \{Y \subset E : A \cap Y = A \cap A^c = \emptyset\}$

D'où $\overline{E} = \overline{A}$ et $\overline{\emptyset} = \overline{A^c}$

ou $E \mathcal{R} A$ $\quad \emptyset \mathcal{R} A^c$

3. Soit $B = A \cap X$ donc $B \subset A$ car $A \cap X \subset A$

Soit C tq $X \mathcal{R} C$ i.e $A \cap X = A \cap C = B$

$B \subset A$

Si $A \subset C$ donc $A \cap C = A = B$

si $C \subset A$ donc $A \cap C = C = B$

si $A \not\subset C$ et $C \not\subset A$ donc B est l'unique qui $\subset A$

4. $f : P(E) / \mathcal{R} \longrightarrow P(A)$

$f(\overline{E}) = f(\overline{A}) = A$

$f(\overline{\emptyset}) = f(\overline{A^c}) = \emptyset$

$\forall X \subset E \; \exists! B \quad f(\overline{X}) = B$

$\forall B \subset A$ tq $B = \emptyset$ et $B \neq A$

$f(\overline{B}) = B$

D'où la bijection.

Exercice 3.13

1. On prend une fonction

$$r : A \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$]a,b[\longmapsto \min\{q : q \in \mathbb{Q} \cap]a,b[\}$$

Or $\{J_\alpha\}$ sont 2 à 2 disjoint donc r injective.

2.

a) $f(r) = f(\frac{p}{q}) = f(\underbrace{\frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}}_{p \text{ fois}}) = p f(\frac{1}{q})$

$$q f(\frac{p}{q}) = f(p) = p f(1) \Rightarrow f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q} f(1)$$

b) Supposons par l'absurde que f n'est pas continue en 0.

Donc $\exists \varepsilon \geq 0 \ \forall N \geq 0 \quad |f(h_n)| \geq \varepsilon$

Donc $\forall x \quad \underbrace{f(x+h_n)}_{g(x) = f(x+h_n)} = f(x) + f(h_n) \Rightarrow \quad |f(x+h_n)| \geq \varepsilon$

Donc soit $J_x =]g(x) - \varepsilon, g(x) + \varepsilon[$ on peut construire une infinité dénombrable de J_x 2 à 2 disjoints car $\mathbb{R}$ non dénombrable ce qui contredit avec 1. donc f est continue en 0.

Alors f est continue pour tout x car $\forall x \in \mathbb{R}_n \quad f(x+h_n) - f(x) = f(x) + f(h_n) - f(x) = f(h_n) \xrightarrow[h_n \to 0]{} 0$ car f C^0 en 0.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$ donc $\exists$ une suite des rationnel $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq $r_n \to x$ i.e $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \quad |r_n - x| < \varepsilon$ car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

$$f(r_n - x) \longrightarrow f(0) = 0 \quad \text{car continue.}$$

$$= r_n f(1) - f(x) \longrightarrow 0 \quad \Rightarrow r_n f(1) \longrightarrow f(x)$$
$$r_n f(1) \longrightarrow x f(1) \ ''$$

d) d'après (c) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x f(1)$

d'où f est linéaire.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda f(x) = \lambda x f(1) = f(\lambda x)$