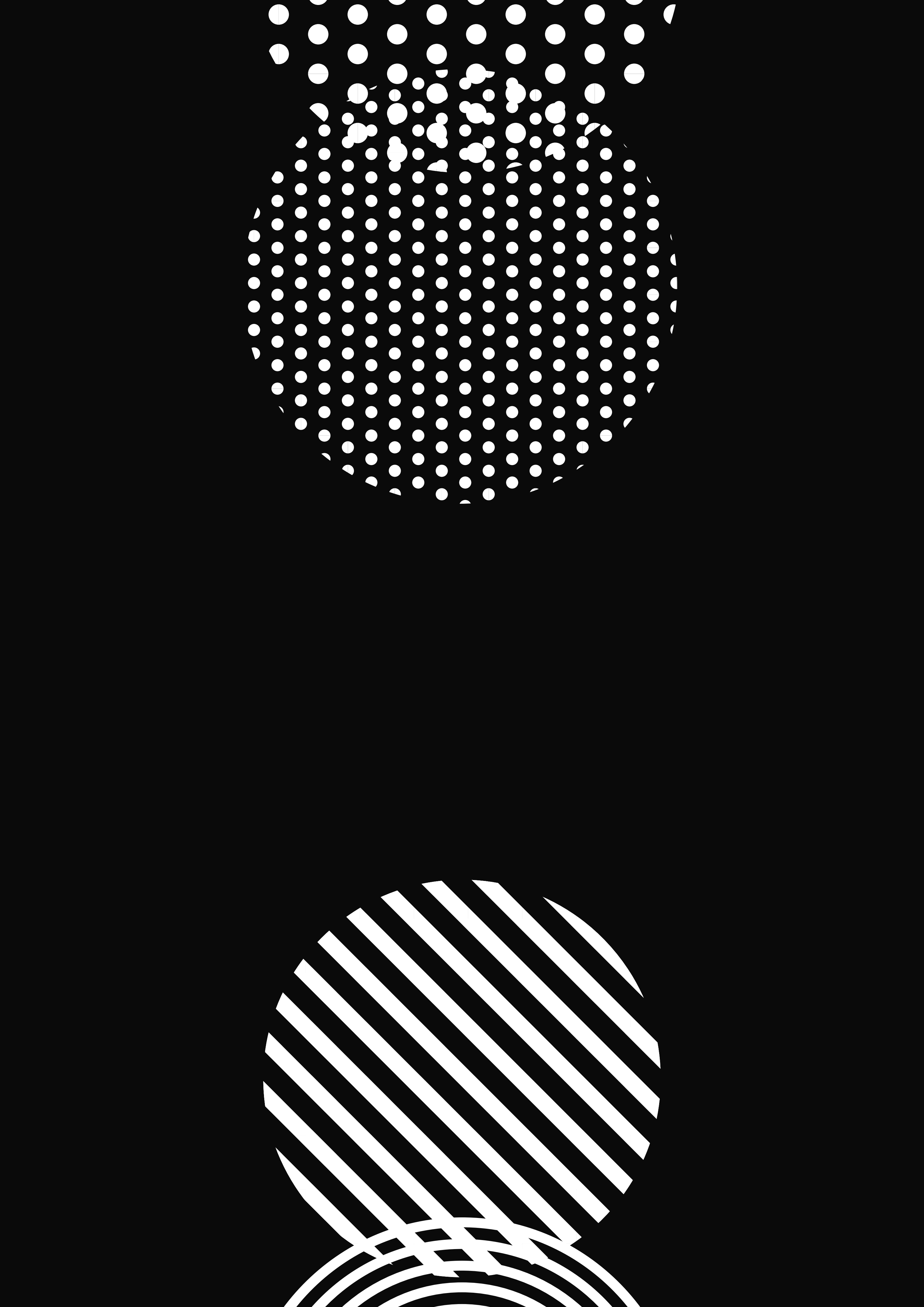

Exercice 2.1

1. $\int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 1\,dt + \int_1^2 -2\,dt$

$= 1 + [-2] = -1$

2. $\forall x \in [0,1[\quad f_+(x) = 1$ et $\forall x [1,2] \quad f_+(x) = 0$

donc on a subdivision $[0,1[\, , [1,2]$
tq $f_+([0,1[) = 1$ et $f_+([1,2]) = 0$

Symmétriquement pour f_-

$A_+ = \int_0^1 1\,dt + 0 = 1$
$A_- = 0 + \int_1^2 -2\,dt = -2$

3. Soit $x \in [0,2]$

Cas 1 : $x \in [0,1[$ alors

$f_+(x) = 1$ et $f_-(x) = 0$
$f(x) = 1$ donc $f(x) = f_+(x) + f_-(x)$

Cas 2 : $x \in [1,2]$ donc

$f_+(x) = 0 \quad f_-(x) = -2$
$f(x) = -2$ donc
$f(x) = f_+(x) + f_-(x)$

D'où la conclusion.

4. On combine [1] et 2 (b)

Exercice 2.3

1. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n = \frac{1}{n}$

d'où $f(x_n) = \sin(x_n) = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right) = \sin(n)$

Or $n \to +\infty$ alors $\sin(n)$ n'admet pas de limite
d'où $f(x)$ n'admet de limite à droite de 0.

2. Soit g en escalier alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tq
$(a_0, \dots, a_N)$ est une subdivision tq g est en escalier i.e g est constante $\forall i \in [\![0, N-1]\!]$
g est constante sur $[a_i, a_{i+1}[$

Prenons l'intervalle $[a_0, a_1[= [0, a_1[$

or $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\exists N' \in \mathbb{N}$ tq $x_n < a_1$

alors $\exists c \in [-1,1]$ tq $g(x_n) = c \quad \forall n \geq N'$

$\sin(x_n) \in [-1,1] \; \forall n \geq N'$ d'où

Si $c = 0$ $\exists\, n' \geq N'$ tq $\sin(x_{n'}) = 1$ d'où

$\sin(x_{n'}) - g(x_{n'}) \geq 1$

si $c > 0$ $\exists\, n' \geq N'$ tq $\sin(x_{n'}) = -1$

d'où $|\sin(x_{n'}) - g(x_{n'})| = |-1-c| = 1+c \geq 1$

si $c < 0$ $\exists\, n' \geq N'$ tq $\sin(x_{n'}) = 1$ et donc

$|\sin(x_{n'}) - g(x_{n'})| = |1-c| \geq 1$

D'où $\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| \geq 1$ d'où f n'est pas réglée.

3.

a) $\sup_{x\in J_n} f(x) = 1$

$\inf_{x\in J_n} f(x) = -1$

$\frac{1}{N} = \frac{\varepsilon}{4}$

$\frac{1}{N}(\sup f(x) - \inf f(x)) = \frac{\varepsilon}{4}\cdot 2 = \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Exercice 2.5

1.

(a) Soit une subdivision de $[0,1]$ $(a_0, \dots, a_N)$

tout intervalle $[a_i, a_{i+1}[$ contient un intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ alors tout intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ contient un rationel et un irrationel, d'où

$$\forall i \in [\![0, N-1]\!], \sup_{x \in]a_i, a_{i+1}[} \mathcal{D}(x) = 1$$

$$\inf_{x \in]a_i, a_{i+1}[} \mathcal{D}(x) = 0$$

D'où $\sup_{\sigma} \mathcal{D}_-(\mathcal{D}, \sigma) = 0$

$\inf_{\sigma} \mathcal{D}_+(\mathcal{D}, \sigma) = 1$

D'où la conclusion que $\mathcal{D}$ n'est pas Riemann integrable.

2.

Exercice 2.6

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)(b-a)$$

donc $\dfrac{1}{(b-a)}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)$

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k}{n}\right)$ $\Rightarrow a=0$ $\quad b-a=1$ $\quad$ donc $b=1$

alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \underbrace{\tan(t)}_{\frac{\sin(t)}{\cos(t)}}\,dt$

b) $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

c) $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$\log\left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}} = \log\left(\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-\frac{1}{n}}\right)$$
$$= -\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$\to = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} -\log\left(1+\frac{k}{n}\right) = \int_1^2 -\log(x)\,dx = -\int_1^2 \log(x)\,dx$$
$$= -\int_0^1 \log(1+x)\,dx$$

Exercice 2.7

1. $$\left|\int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^b f_n(t) - f(t)\,dt\right|$$
$$\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

D'où $\int f_n \longrightarrow \int f$

2.
(a) $$f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{n} + x$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$
$$\int_0^\pi f_n(x)\,dx = \int_0^\pi \frac{\sin^2(nx)}{n} + x\,dx$$
$$= \int_0^\pi \frac{\sin^2(nx)}{n}\,dx + \int_0^\pi x\,dx$$
$$= \int_0^\pi \frac{1-\cos(2nx)}{2n} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi$$
$$= \left[\frac{1}{2n}x\right]_0^\pi - \left[\frac{\sin(2nx)}{4n^2}\right]_0^\pi + \frac{\pi^2}{2}$$
$$= \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n} + \pi\right)$$

(b) $$\left|\frac{\sin^2(nx)}{n} + x - x\right| = \left|\frac{\sin^2(nx)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \forall x \in [0,\pi]$$
D'où f cv unif. vers $x \mapsto x$

(c) D'après 1) c'est vrai.
D'après (b) $$\int_0^\pi f_n(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n}+\pi\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{2} = \int_0^\pi x\,dx$$
$$= \int_0^\pi \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$$

4) (a)
$$|f_n(x)| = \frac{1}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
donc $|f_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc f_n cv uniformement vers $x \mapsto 0$.

(b) $$\int_0^n f_n(x)\,dx = \int_0^n \frac{1}{n}\,dt = \left[\frac{1}{n}t\right]_0^n = 1$$
$$\int_0^{+\infty} 0\,dt = 0 \neq \int_0^n \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$$

Exercice 2.8

1. $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x+y+2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x+y+2\sqrt{xy}$

$\sqrt{|a-b|} \geq \sqrt{||a|-|b||}$

supposons $a \geq b$

$|a-b| = |b+(a-b)-b|$

$= |(a-b)+(b-b)| \leq |a-b|+|b-b|$

$\sqrt{b+(a-b)} - \sqrt{b} \leq \sqrt{b} + \sqrt{|a-b|} - \sqrt{b} = \sqrt{a-b}$

$= \sqrt{a} - \sqrt{b}$

2. Soit $x \in [0,1]$ soit $x_n = x + \frac{1}{n}$

$g(x_n) - g(x) = \int_0^1 \sqrt{f(t) + x + \frac{1}{n^2}}\, dt - \int_0^1 \sqrt{f(t)+x}$

$\leq \int_0^1 \sqrt{f(t)+x} + \sqrt{\frac{1}{n^2}} - \sqrt{f(t)+x}\, dt$

$= \int_0^1 \frac{1}{n}\, dt = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

donc g est continue.

$g(x) = \int_0^1 \sqrt{f(t)+x^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{(\sqrt{f(t)}+x)^2 - 2\sqrt{f(t)}x}\, dt$

$\geq \int_0^1 |\sqrt{f(t)}+x - \sqrt{2\sqrt{f(t)}x}|\, dt$

$f(t)+x^2 = (\sqrt{f(t)}+x)^2 - 2\sqrt{f(t)}x$