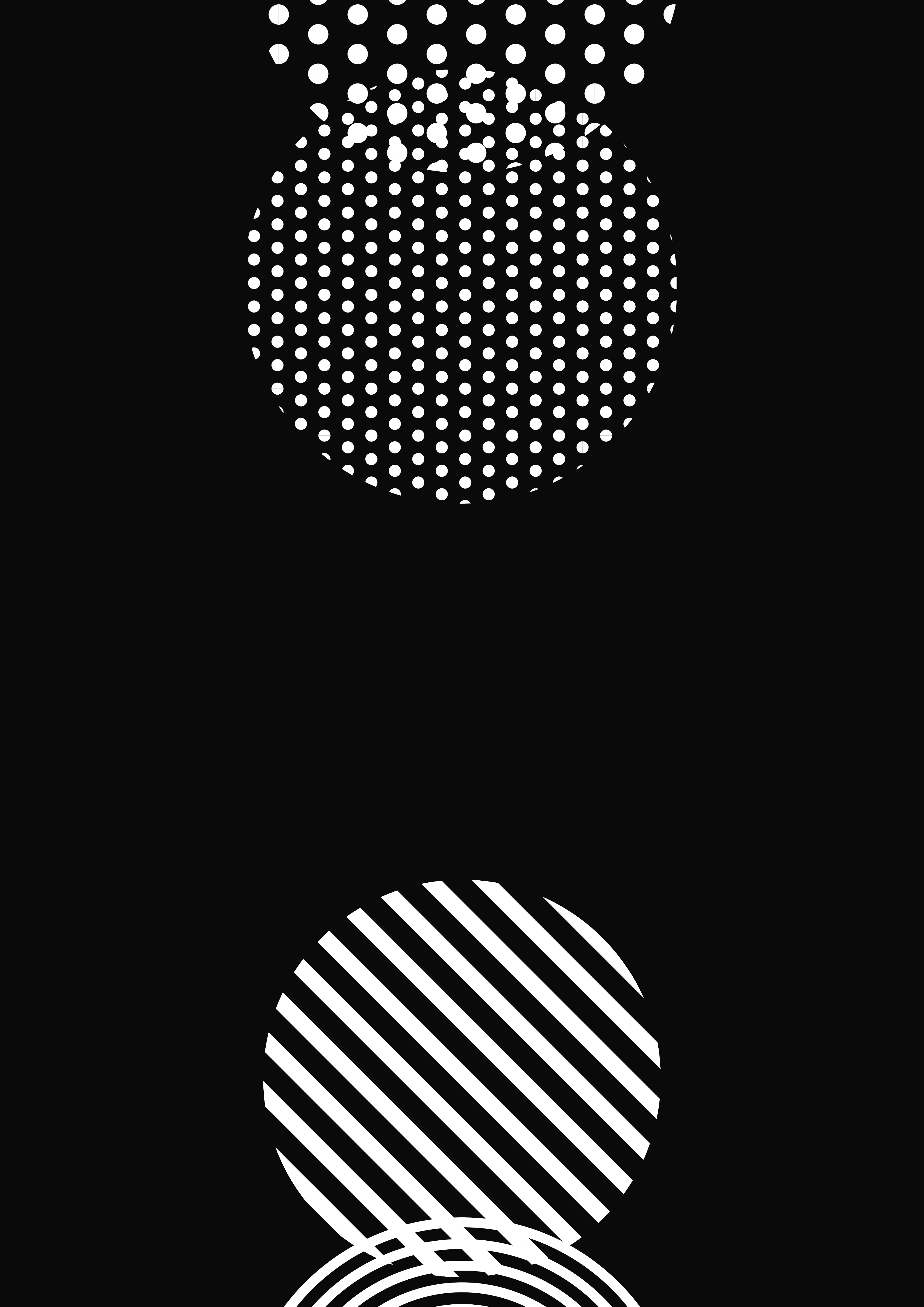


Exercice 1

1. $$\mathbb{1}_A \circ f = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad f(x) \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\mathbb{1}_A \circ f = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad tq \quad f(x) \in A$

0 sinon

$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in A\}$

donc $\mathbb{1}_A \circ f = \mathbb{1}_{f^{-1}(A)}$

2. Soit x, regardons 3 cas

$\underline{x \in A}$ donc $x \in B$ d'où

$\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = 1$

$\underline{x \in B \setminus A}$

$\mathbb{1}_A(x) = 0 < 1 = \mathbb{1}_B(x)$

$\underline{x \notin B}$ $\mathbb{1}_A(x) = 0 = \mathbb{1}_B(x)$

Donc $\forall x, \ \mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$

3. $$\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \quad \text{et} \quad x \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \text{ et } x \in B \quad \text{car } \mathbb{1}_A(x) = 1 \ \ \mathbb{1}_B(x) = 1 \\ 0 & \text{sinon, car au moins un } = 0 \end{cases}$$

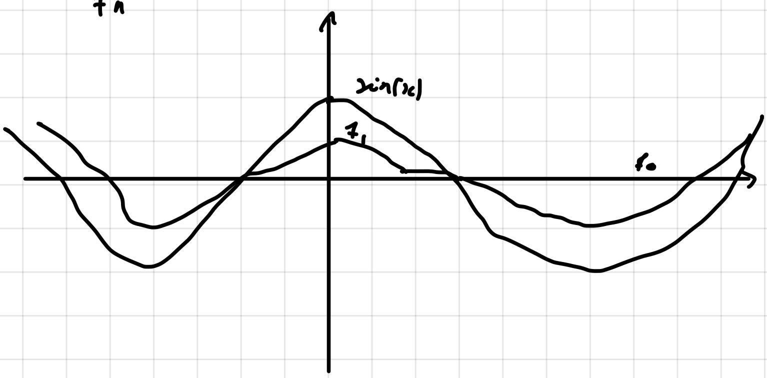
donc $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B(x) \quad \forall x$

4.

Exercice 2 :

1. $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad tq \quad \forall n \geq N \quad |f_n - f| < \varepsilon$

2. (a) f_n



b) f_n cv vers $f(x) = \sin(x)$

g_n cv vers 0

h_n cv vers $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

k_n cv vers $k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2')

f_n tend vers 1

g_n tend vers $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{sinon} \end{cases}$

h_n vers $\mathbb{1}_{[0,+\infty[}$

k_n vers $\mathbb{1}_{\{0\}}$

Exercice 3

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite des fonction. f_n converge uniformement vers f si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\| f_n - \sin(x) \|_\infty = \left\| \frac{n \sin(x)}{1+n} - \sin(x) \right\|_\infty$$

$$= \left\| \frac{n \sin(x) - n \sin(x) - \sin(x)}{1+n} \right\|_\infty$$

$$= \left\| - \frac{\sin(x)}{1+n} \right\|_\infty \leq \frac{1}{1+n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc cv uniformement

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $x = N+1$

$$| \mathbb{1}_{[0,N]}(x) x - x | = |-x| = x$$

donc $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \exists x > 0$ tq $|g_n(x) - g(x)| > \varepsilon$
donc la convergence n'est pas uniforme

Sol de prof

Soit $\varepsilon > 0$, soit $x \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{n \sin(x)}{1+n} - \sin(x) \right| = \left| \frac{n \sin(x) - (1+n) \sin(x)}{1+n} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{1+n} \sin(x) \right| \leq \frac{1}{1+n}$$

on trouve borne indépendante de x

Donc $\| f_n - f \|_\infty \leq \frac{1}{1+n}$ donc $\| f_n - f \|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Sol de prof

$h_n(x) = e^{-nx^2}$

Exercice 4

2) But: mq $\|f_n\|_\infty = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

1) Soit $x \in \mathbb{R}$

$f_n(x) = \cos^n(x) \sin(x)$

Si $\cos(x) = 1$ ou $\cos(x) = -1$ alors $\sin(x) = 0$

d'où $f_n(x) = 0$ si $\cos(x) = 1$

Si $\cos(x) \neq \pm 1$ donc $\cos(x) \in]-1,1[$
et $|\sin(x)| \leq 1$ d'où $\cos^n(x)\sin(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

D'où f_n cv. simplement vers la fonction nulle.

2) $\|f_n\|$

$$\left(\cos(x)^n \sin(x)\right)' = -n\cos(x)^{n-1}\sin(x) + \cos^{n+1}(x)$$
$$= \cos(x)^{n-1}\left(\cos^2(x) - n\sin(x)\right)$$

$t = \cos(x)$ $\qquad t^2 + \sin^2(x) = 1$

$\sin(x) = \sqrt{1-t^2}$

$t^n\sqrt{1-t^2} = t^n(1-t^2)^{\frac{1}{2}} = g(t)$

$g(t)^2 = t^{2n}(1-t^2)$

$$(g(t)^2)' = 2n\,t^{2n-1}(1-t^2) - 2t\,t^{2n}$$
$$= 2n\,t^{2n-1}(1-t^2) - 2t^{2n+1}$$
$$= 2t^{2n-1}(n - nt^2 - t^2)$$
$$= 2t^{2n-1}(n - t^2(n+2))$$

$t^2(n+2) = n \Rightarrow \sqrt{\frac{n}{n+1}} = t \Rightarrow t^2 = \frac{n}{n+1}$

$t_0 = 0 \qquad t_1 = \sqrt{\frac{n}{n+2}}$ donc $\sqrt{\frac{n}{n+2}}$

$$g(t)^2 = g(max)^2 = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

$$g(max) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

3) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\frac{1}{2}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

d'où $\|f_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

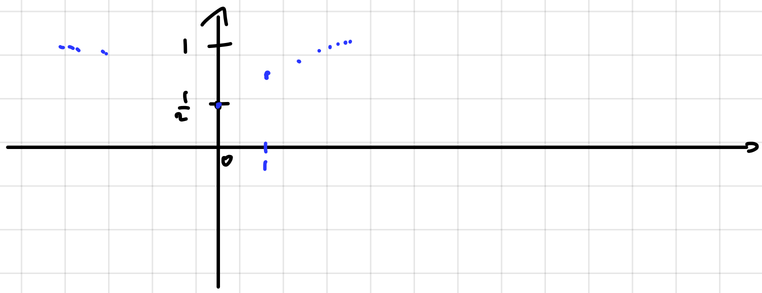
$\quad \|$

$\|f_n - 0\|$

Donc f_n cv vers 0 normalement
donc uniformément.

Exercice 5

$$f(x) = \frac{1+x^2}{2+x^2}$$



$\|f\|_\infty = 1$

$\|g\|_\infty = 1.5$

Exercice 10

4. $A \subset \mathbb{R}$ dense i.e $\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \exists a \in A$ tq $\|x - a\| < \varepsilon$
$\iff \forall x \in \mathbb{R} \ \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \ a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$

Soit $x \in \mathbb{R}$ donc $\exists y \in \mathbb{R}$ tq $f(x) = y$
Or A dense dans $\mathbb{R}$ donc $\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $a_n \longrightarrow y$
$\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in A$ donc $\exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $f(u_n) = a_n$
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite, Or f continue
donc $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty}(u_n))$ $\quad f(u) = y = f(x)$
$\quad \| \quad$ donc $\exists u \in \mathbb{R}$ tq $\quad$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow x$
$\quad y$

1. La suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv. uniformément

si $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ \forall x\in\mathbb{R}\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

2. $\left|\frac{n\sin(x)}{1+n}-\sin(x)\right| = \left|\frac{n\sin(x)-\sin(x)-n\sin(x)}{1+n}\right| = \left|-\frac{\sin(x)}{1+n}\right|$

$= \left|\frac{\sin(x)}{1+n}\right| \leq \frac{1}{1+n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

cv. unif

$\left|\mathbb{1}_{[0,n]}(x)x - x\right|$ pas uniforme

$\left|e^{-nx^2}-0\right| = \left|e^{-nx^2}\right| \leq e^{-}$

$\|f_n(x)-f(x)\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n-f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$