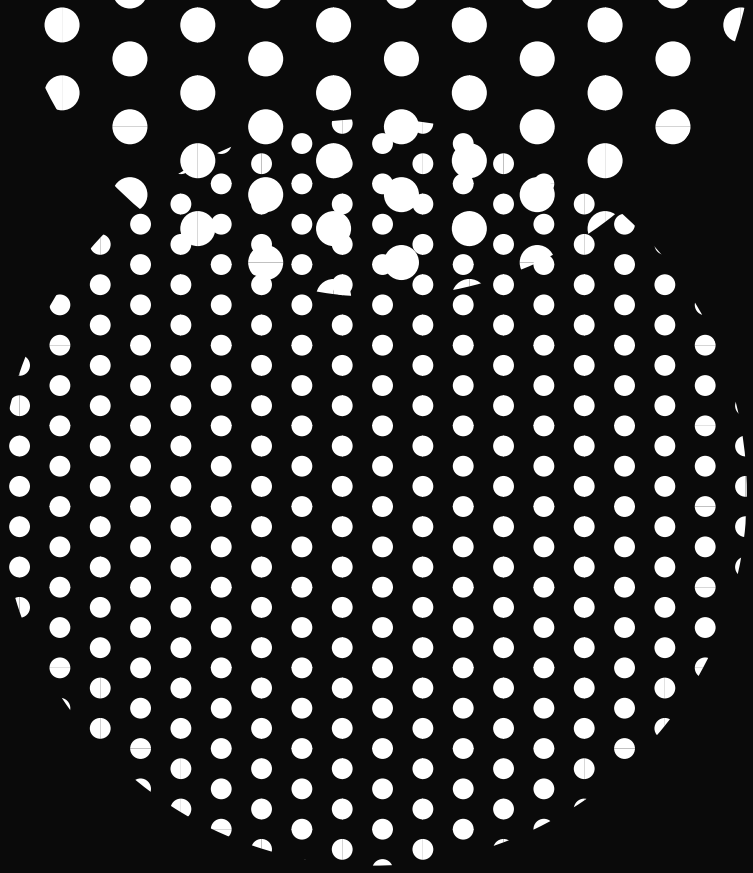


Exercice 6.2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ si $x \notin [0, \frac{\pi^2}{4}]$, $f_n(x) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, donc
$f_n(x) \geq 0$

si $x \in [0, \frac{\pi^2}{4}]$, alors $0 \leq \frac{\sqrt{x}}{n} \leq \frac{\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$
d'où $f_n \geq 0$

2. Soit $x \in [0, \frac{\pi^2}{4}]$

$\cos\left(\frac{\sqrt{x}}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ car $\frac{\sqrt{x}}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ car $\sqrt{x}$ fixé

Donc sur $[0, \frac{\pi^2}{4}]$ $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

sur $\mathbb{R} \setminus [0, \frac{\pi^2}{4}]$ $f_n(x) = 0$ donc

f_n cv. simplement vers $\mathbb{1}_{[0, \frac{\pi^2}{4}]}$

3. On sait que cos est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

D'après 1. $\forall x \in [0, \frac{\pi^2}{4}]$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Soit $x \in [0, \frac{\pi^2}{4}]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\sqrt{x}}{n} \geq \frac{\sqrt{x}}{n+1}$ i.e

$\left(\frac{\sqrt{x}}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante, d'où

$\left(\cos\left(\frac{\sqrt{x}}{n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

4. D'après le MCT $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n \to +\infty} f_n \, d\lambda$

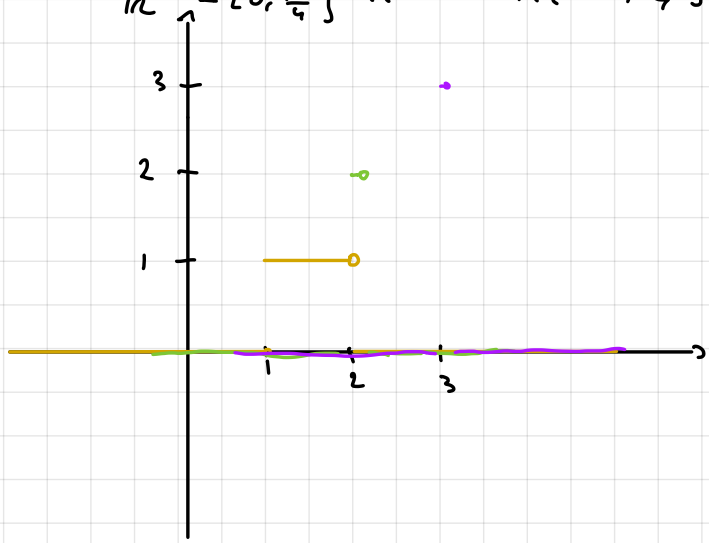
Alors $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0, \frac{\pi^2}{4}]} \, d\lambda = \lambda([0, \frac{\pi^2}{4}]) = \frac{\pi^2}{4}$

Exercice 6.3

1. $u_1 = \mathbb{1}_{[1,2[}$

$u_2 = 2\mathbb{1}_{[2, 2+\frac{1}{8}[}$

$u_3 = 3\mathbb{1}_{[3, 3+\frac{1}{27}}$



2. les $[n, n+\frac{1}{n^3}[$ sont 2 à 2

Alors soit $x \in \mathbb{R}$

<u>1 cas :</u> $\exists n \in \mathbb{N}^*$ $x \in [n, n+\frac{1}{n^3}[$

Alors $\sum_{k \geq 1} u_k(x) = u_n(x) = n$

<u>2 cas :</u> Il n'existe pas de tel n, alors

$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n(x) = 0$ d'où

$\sum_{n \geq 1} u_n(x) = 0$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$ la limite $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ existe, d'où

$\sum u_n$ cv. simplement.

3.

4. f est non-négative et mesurable.

Prenons $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

Alors φ_n est une fonction simple, tq $\varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq \dots \leq f$

avec $\varphi_n \longrightarrow f$ d'où f est intégrable.

5. Si $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

pourquoi incorrecte

alors $\liminf_{x \to +\infty} f(x) > 0$ d'où $f(x) > 0$ p.p

. $\exists\, l \in \mathbb{R}^+$ tq $\liminf_{x \to +\infty} f(x) \geq l$

Alors $\exists\, a \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall x \geq a$, $f(x) \geq l$

$\lambda(]a, +\infty[) = +\infty$ d'où $\int |f| \lambda \geq l \cdot \lambda(]a, +\infty[) = +\infty$

donc f n'est pas intégrable.

D'après ce qui précède, $f \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ mais est intégrable.

Exercice 6.4

1. f est non - négative.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$

Soit $\varepsilon = \frac{1}{N}$ on prends $(E_n)_{n=1}^{N}$ une partition de $]0,1]$ où tout $E_n =]a_n, b_n]$ est de longueur $\varepsilon = \frac{1}{N}$

Posons $\varphi_N = \sum_{n=1}^{N} b_n^{\alpha} \mathbb{1}_{E_n}$ On a bien $\forall N \in \mathbb{N}^*$ $\varphi_N \leq f$

De plus $\forall x \in]0,1]$ $\varphi_N(x) \longrightarrow f(x)$

Alors $\int f \lambda = \sup \{ \int \varphi_N \lambda : N \in \mathbb{N}^* \}$

$\int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{]0,1]} d\lambda = \int_{]0,1]} f d\lambda$ les 2 positives et mesurables.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{[\frac{1}{n},1]} f d\lambda = \int_{[\frac{1}{n},1]} x^{\alpha} d\lambda$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^{\alpha} dx$$

$\alpha \neq -1$

$$= \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_{\frac{1}{n}}^{1}$$

$$= \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \frac{1}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha+1}} \right)$$

$2^{\sqrt{2}}$
$= e^{\log(2^{\sqrt{2}})}$
$= e^{\sqrt{2} \log(2)}$

Exercice 6.10

$$\int_{[0,+\infty[} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[} f d\lambda$$

On sait que $\mathbb{1}_{[0,+\infty[} f = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{1}_{[0,n]} f = f_n$

de plus f_n est croissante, mesurable, donc

le théorème de convergence monotone s'applique et $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to +\infty} \mathbb{1}_{[0,n]} f d\lambda = \lim_{n \to +\infty} \int \mathbb{1}_{[0,n]} f d\lambda$

$\shortparallel$

$\int_{[0,+\infty[} f d\lambda = \lim_{n \to +\infty} \int_{[0,n]} f d\lambda$

Même raisonnement pour $\int_{[0,1]} f d\lambda$ car $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{1}_{[\frac{1}{n},1]} f = \mathbb{1}_{[0,1]} f$

Exercice 6.5

1. $\int_{[0,+\infty[} x e^{-x^2} d\lambda = \lim_{n \to +\infty} \int_{[0,n]} x e^{-x^2} d\lambda$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^n x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^n = -\frac{1}{2} e^{-n^2} + \frac{1}{2} e^0$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}$$

2. $\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} d\lambda = \lim_{n \to +\infty} \int_{[-n,n]} e^{-|x|} d\lambda$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-n}^n e^{-|x|} dx = 2 \int_0^n e^{-x} dx$$

$$= 2 \left[-e^{-x} \right]_0^n = -2e^{-n} + 2e^0 = 2 - 2e^{-n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$$

3. $\int_{[0,+\infty[} x e^{-x} d\lambda = \lim_{n \to +\infty} \int_{[0,n]} x e^{-x} d\lambda$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$(uv)' = u'v + v'u$

$$\int_0^n x e^{-x} dx$$

$\underline{u = e^{-x}}$ $\quad v = \frac{1}{2} x^2$ $\qquad u = x \quad v = -e^{-x}$

$u' = -e^{-x}$ $\quad \underline{v' = x}$ $\qquad u' = 1 \quad v' = e^{-x}$

$$= \left[e^{-x} \right]_0^n - \int_0^n -e^{-x} dx$$

$$= \left[e^{-x} \right]_0^n - \left[e^{-x} \right]_0^n$$

$$= \left[-x e^{-x} \right]_0^n - \left[e^{-x} \right]_0^n$$

$$= -n e^{-n} - e^{-n} + 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

Exercice 6.6

$$f_n(x) = \frac{n}{\sin^2(n) + n x^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{x^2}$$

$\int_{]0,+\infty[} \liminf f_n(x)dx = +\infty \leq \liminf \int_{]0,+\infty} f_n(x)dx$

Donc J_n diverge.

Exercice 6.7

Soit $x \in \mathbb{R}$

Cas 1 : $x \in [0, n]$

donc $\frac{x}{n^2} \leq \frac{n}{n^2} \leq \frac{1}{n}$

cas 2 : $x \in [n, n^2]$

$n - x \leq 0 \leq 2n - x$ donc $2n - x \leq n \leq 3n - x$

donc $\frac{2n-x}{n^2} \leq \frac{1}{n}$

cas 3 :

$0 \leq \frac{1}{n}$

Donc $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$

Or $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc f_n cv. vers 0 uniformement.

3. $\int f_n \, dx = 1$

4. $\int \liminf f_n dx = 0 < 1 = \liminf \int f_n dx$

Exercice 6.8

$\forall x \in \mathbb{R}$ $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc f_n cv. uniformement vers 0.

Exercice 6.14

Soit $n \in \mathbb{N}$ si n pair

$f_n^{-1}(\{1\}) = X$ mesurable par hypothèse

$f_n^{-1}(\{0\}) = X^c$ mesurable car complémentaire d'un mesurable.

donc pour n pair f_n est mesurable.

pour n impair

$f_n^{-1}(\{1\}) = [0,1] \cap X^c$ mesurable car l'intersection des mesurables.

$f_n^{-1}(\{0\}) = ([0,1] \cap X^c)^c$ mesurable car complémentaire d'un mesurable.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est mesurable.

De plus $\forall x \in [0,1]$ $f_n(x) \in \{0,1\}$ donc f_n est positive pour tout n.

Donc le lemme de Fatou s'applique.

Soit $x \in [0,1]$

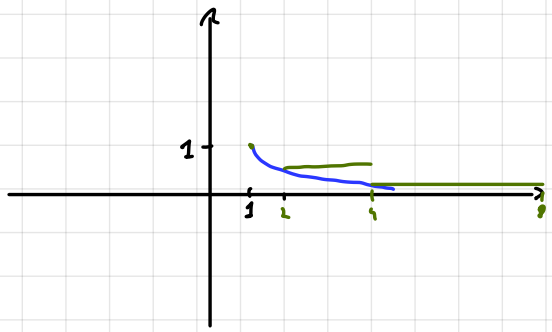
$\liminf_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ $\qquad \int_{[0,1]} f_n \, d\lambda \in \{\lambda(X), 1-\lambda(X)\}$ avec $\lambda(X) \in]0,1[$ / $1-\lambda(X) \in]0,1[$

d'où $\liminf_{n \to +\infty} \int_{[0,1]} f_n \, d\lambda = \min(\lambda(X), 1-\lambda(X))$

donc $\int \liminf_{n \to +\infty} f_n \, d\lambda = 0 < \min(\lambda(X), 1-\lambda(X)) = \liminf_{n \to +\infty} \int_{[0,1]} f_n \, d\lambda$

Exercice 6.16

1.



$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \mathbb{1}_{[2^k, 2^{k+1}[} \, d\lambda$

On note $\varphi_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^{k+1}} \mathbb{1}_{[2^k, 2^{k+1}[}$ qui est positive et croissante

donc le théorème de convergence monotone s'applique et donc

$$\lim_{N\to+\infty} \int \varphi_N \, d\lambda = \int \lim \varphi_N \, d\lambda$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2^{k+1}} \mathbb{1}_{[2^k, 2^{k+1}[} \, d\lambda$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \lambda([2^k, 2^{k+1}[)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \, 2^{k+1} - 2^k = \sum_{k=0}^{+\infty} 1 - \frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2} = +\infty$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [1, +\infty[$ (si $x \notin [1, +\infty[$ $f_n(x) = f(x) = 0$.

Si $x \geq 2^{n+1}$ donc $f(x) = \frac{1}{x}$ et $f_n(x) = 0$ donc $f(x) > f_n(x)$

Si $x < 2^{n+1}$ donc $\exists k \leq n$ tq $x \in [2^k, 2^{k+1}[$

donc $f_n(x) = \frac{1}{2^{k+1}} < x \leq \frac{1}{2^k}$ car $2^k \leq x < 2^{k+1}$ et x positive

donc $f(x) = \frac{1}{x} \geq f_n(x)$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}$ $f \geq f_n$

3. D'après 2 $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \leq f$, or f_n et f sont positives donc

$\int f_n \, d\lambda \leq \int f \, d\lambda$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \int f_n \, d\lambda \leq \int f \, d\lambda$

d'après 1 $\lim_{n\to+\infty} \int f_n \, d\lambda = +\infty$ donc $\int f \, d\lambda = +\infty$

4. $x^{-\alpha} \Rightarrow \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^n = -\frac{n^{-\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1}$

$$\int_1^n \frac{1}{x^\alpha} \, d\lambda(x) = \frac{1-n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^{1-\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} \, d\lambda(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \longrightarrow \frac{1}{1-\alpha}$

$$\| $$

$$\int_{[1,+\infty[} \frac{1}{x^\alpha} \, d\lambda(x)$$

$$\| $$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x) \frac{1}{x^\alpha} \, d\lambda(x)$$

Exercice 6.17

Soit $\varphi_n = \int_{\mathbb{R}} |f_n| d\lambda \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Or φ_n est bornée car $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varphi_n \in [0,1]$ donc il existe une extraction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tq $\varphi_{\psi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in [0,1]$

de plus $f_{\psi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ simpement. d'après le lemme de Fatou

$$\int \liminf_{n \to +\infty} f_{\psi(n)} d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda \leq \liminf_{n \to +\infty} \int f_{\psi(n)} d\lambda = \ell$$

d'où $\int_{\mathbb{R}} f \leq \ell \leq 1$ donc f est intégrable.

Exercice 6.18

Mq $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \int_0^{+\infty} \lambda(\{x \in \mathbb{R}, f(x) \geq t\}) dt$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \, \lambda(x \in \mathbb{R} : f(x) \geq c_k)$$

Notons

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{f(x) \geq c_k\}}(f(x)) dx$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} c_k \mathbb{1}_{\{f(x) \geq c_k\}}(f(x)) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \mathbb{1}_{\{f(x) \geq c_k\}}(f(x)) dx$$

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^n \mathbb{1}_{\{f^{-1}(c_k^n)\}}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^n \mathbb{1}_{\{f(x) = c_k^n\}}(f(x))$$

$$\int f \, d\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^n \, \lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) = c_k^n\})(x)$$

Exercice 6.1

Soit $N \in \mathbb{N}$ notons $(c_n)_{n=1}^{N}$ une subdivision du domaine de f

Notons $\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \mathbb{1}_{f^{-1}(c_n)}(x)$ tq $\varphi_n \nearrow f$

D'où $\int_{[a,b]} f d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} c_n \lambda(f^{-1}(c_n))$ notons $A_n = f^{-1}(c_n)$

Supposons que $\exists\, k_a, k_b \in [\![1,N]\!]$ tq $c_{k_a} = f(a)$ $c_{k_b} = f(b)$

donc $\int_{[a,b]} f d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \sum_{n\in[\![1,N]\!]\setminus\{k_a,k_b\}} + c_{k_a}\lambda(A_{k_a}) + c_{k_b}\lambda(A_{k_b})$

Or $\lambda(A_{k_a}) = \lambda(A_{k_a}\setminus\{k_a\})$ comme $\lambda(\{k_a\}) = 0$

et $\lambda(A_{k_b}) = \lambda(A_{k_b}\setminus\{k_b\})$

donc $\int_{[a,b]} f d\lambda = \lim_{n\to+\infty}$

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{n\in[\![1,N]\!]\setminus\{k_a,k_b\}} + c_{k_a}\lambda(A_{k_a}\setminus\{k_a\}) + c_{k_b}\lambda(A_{k_b}\setminus\{k_b\})$

$= \int_{]a,b[} f d\lambda$

$\underbrace{\int_{\{a\}} f d\lambda}$ $\leftarrow$ $\int_{]a,b[} f d\lambda$ et $\int_{\{b\}} f d\lambda$

$= \lambda(\{a\}) f(a)$

$= 0$ $\cancel{\infty}$ $+\infty$

$\emptyset$ $\quad \emptyset(a) = \alpha \longrightarrow +\infty$

$\in \mathbb{R}$ $\quad \neq \pm\infty$

$\emptyset \longrightarrow 1$

$\emptyset(a) \cdot 0 = \overset{\in\mathbb{R}}{\alpha} \cdot 0 = 0$

$\downarrow$

$+\infty$

2 (b)

f_n est positive croissante donc le TCM s'applique et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_n \, d\lambda = \int_{[a,b]} f \, d\lambda$$

On a $\int_{[a,b]} f_n \, d\lambda = \int_{\{a\}} f_n \, d\lambda + \int_{\{b\}} f_n \, d\lambda + \int_{]a,b[} f_n \, d\lambda$

$$= 0 + 0 + \int_{]a,b[} f_n \, d\lambda$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int_{]a,b[} f_n \, d\lambda}_{= \int_{[a,b]} f_n \, d\lambda} = \int_{]a,b[} f \, d\lambda$