Théorème: Soit X une partie mesurable et $f : X \to [0,+\infty]$ une fonction mesurable. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des fonctions positives telles que

$$f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f$$

et $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ simplement alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\lambda = \int_X f$$

Preuve.

Or $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f$ alors on a

$$\int f_1 \, d\lambda \leq \int f_2 \, d\lambda \leq \dots \leq \int f$$

De plus, or f_n est positive $\forall n \in \mathbb{N}$ et

$\int f_1 d\lambda \leq \int f_2 \, d\lambda \leq \dots$ donc

$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n = L \in [0,+\infty]$ existe

D'où $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\lambda \leq \int_X f \, d\lambda$ alors il nous reste à montrer $\int_X f \, d\lambda \leq L$

Soit $\alpha \in]0,1[$ et soit φ une fonction simple telle que $\varphi \leq f$ donc $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbb{1}_{\{A_j\}}(x)$

$\forall n \in \mathbb{N}$ on introduit $E_n = \{x \in X : \alpha\varphi(x) \leq f_n(x)\}$

Or f_n est croissante monotone donc $E_1 \subset E_2 \subset \dots$
De plus $\alpha\varphi \leq \alpha f < f$ donc en posant $\varepsilon = f - \alpha\varphi > 0$

$\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)$ donc $E_n \longrightarrow X$ posons N' tel N

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\varphi(x)\mathbb{1}_{E_n}(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbb{1}_{\{A_j\}}(x)\mathbb{1}_{\{E_n\}}(x)$$
$$= \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbb{1}_{\{A_j \cap E_n\}}(x)$$

donc par la continuité de la mesure $\lambda(A_j \cap E_n) \longrightarrow \lambda(A_j)$
alors

$$\int \alpha\varphi(x) \, d\lambda = \sum_{j=1}^{k} c_j \lambda(A_j)$$

$$\int \varphi(x)\mathbb{1}_{E_n}(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j \lambda(A_j \cap E_n) \longrightarrow \sum_{j=1}^{k} c_j \lambda(A_j) = \int \varphi \, d\lambda$$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\alpha \int \varphi(x) \mathbb{1}_{E_n}(x)\, d\lambda \leq \int f_n \mathbb{1}_{E_n}\, d\lambda \leq \int f_n\, d\lambda$$

En faisant tendre $n \to +\infty$ on obtient

$\alpha \int \varphi(x)\, d\lambda \leq \mathcal{L}$ de plus en faisant tendre $\alpha \to 1$

$\int \varphi(x)\, d\lambda \leq \mathcal{L}$ Or φ est une fonction simple arbitraire alors cela reste vrai pour toute φ simple telle que $\varphi \leq f$

D'où $\underbrace{\sup_{\varphi \leq f} \left\{ \int_X \varphi\, d\lambda \right\}}_{\text{"}\int f\text{"}} \leq \mathcal{L}$

d'où $\int f \leq \mathcal{L}$ donc $\int f = \lim \int f_n$