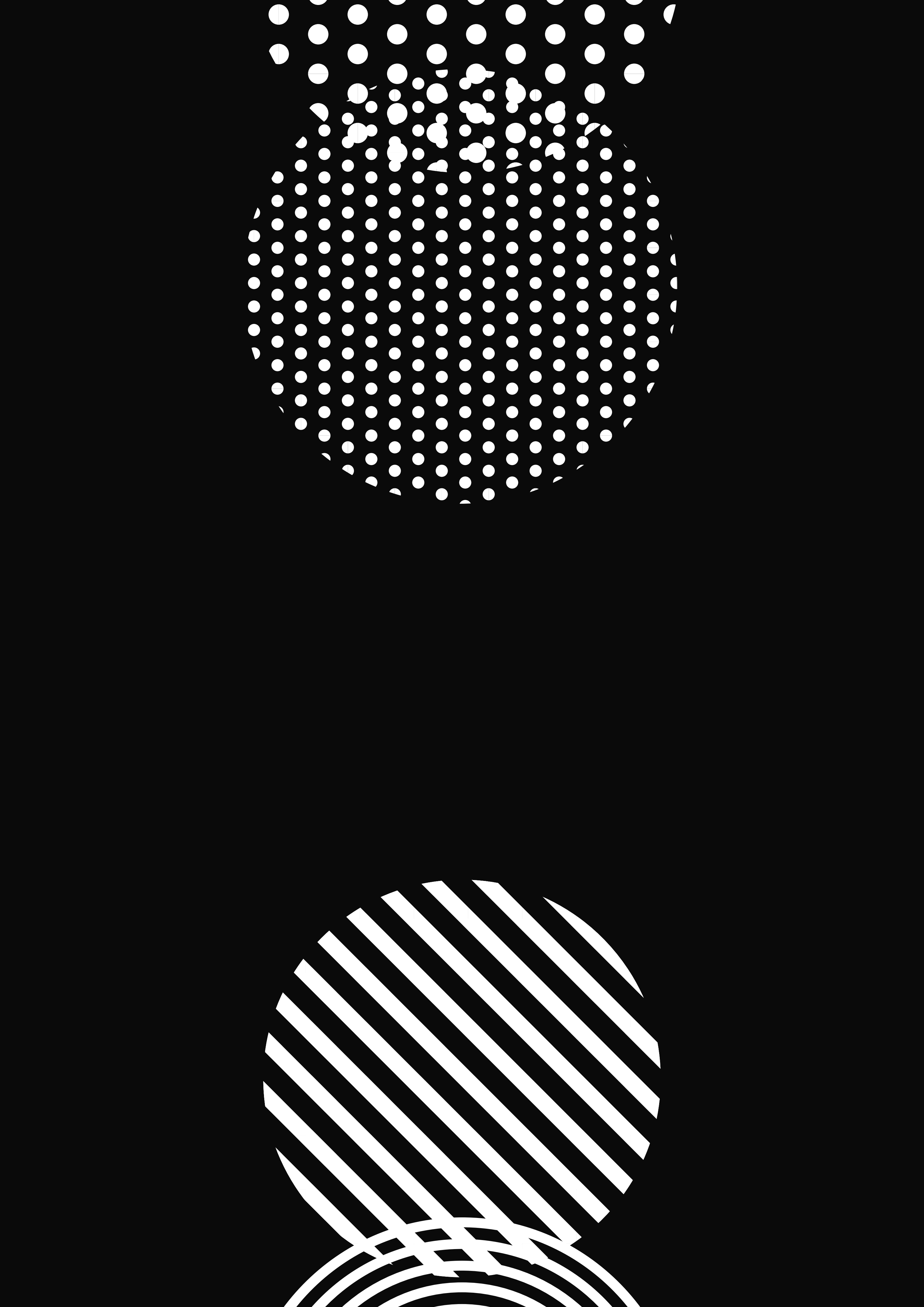

1. $f_n(x) = n \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$ $g_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$

Soit $x \in [0,1]$

si $x = 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n} > 0$

donc $x \in [0, \frac{1}{n}]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

donc $f_n(0) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Supposons $x \in]0,1]$

Or $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $\frac{1}{n} < x$

d'où $\forall n \geq N$ $f_n(x) = 0$

donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$

Soit $x \in [0,1]$

cas 1 : $x = 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $g_n(0) = 0$ d'où $g_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

cas 2 : $x \in]0,1]$

$g_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc g_n converge vers une fonction nulle simplement.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$

$\int_{\frac{1}{k}}^{1} \varphi(x)\, d\lambda(x) = \int_0^1 \varphi(x) \mathbb{1}_{[\frac{1}{k},1]}(x)\, d\lambda(x)$

Notons $f_k(x) = \varphi(x) \mathbb{1}_{[\frac{1}{k},1]}(x)$ une suite de fonction.

f_k est mesurable, positive et croissante donc le théorème de convergence monotone s'applique et

$\lim_{k\to+\infty} \int_0^1 f_k(x)\, d\lambda(x) = \int_0^1 \lim_{k\to+\infty} f_k(x)\, d\lambda(x) = \int_0^1 \varphi(x)\, d\lambda(x)$

3. $$\int_0^1 f_n(x)\,d\lambda(x) = \int_0^1 n\,\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x)\,d\lambda(x)$$
$$= \int_0^{\frac{1}{n}} n\,d\lambda(x)$$
$$= \int_0^{\frac{1}{n}} n\,dx$$
$$= [nx]_0^{\frac{1}{n}} = n\cdot\frac{1}{n} - n\cdot 0 = 1$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,d\lambda(x) = 1$

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,d\lambda(x) = \int_{\{0\}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,d\lambda(x)$$
$$+ \int_{]0,1]} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,d\lambda(x)$$
$$= 0\cdot+\infty + 1\cdot 0 = 0$$

(6) D'une part Soit $n\in\mathbb{N}$ $f_n(\frac{1}{n}) = n\,\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(\frac{1}{n}) = n$

$f_{n+1}(\frac{1}{n}) = n\,\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n+1}]}(\frac{1}{n}) = 0$ car

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ donc $\frac{1}{n} \notin [0,\frac{1}{n+1}]$

d'où $f_{n+1}(\frac{1}{n}) < f_n(\frac{1}{n})$ donc la suite f_n n'est pas croissant donc le théorème de convergence monotonne ne s'applique pas.

De l'autre coté il n'existe pas de fonction indépendante de n qui domine f_n d'où le théorème de convergence dominée ne s'applique pas.

4. Soit $u\in[0,1]$ $u \leq 1$

d'où $\frac{u}{1+u^2} \leq \frac{1}{1+u^2}$

de plus $u\leq 1 \Rightarrow u^2 \leq 1 \Rightarrow 1+u^2 \leq 2$

$u\geq 0 \Rightarrow u^2\geq 0 \Rightarrow 1+u^2 \geq 1$ d'où $\frac{1}{1+u^2} \leq \frac{1}{1} = 1$

d'où $\frac{u}{1+u^2} \leq \frac{1}{1+u^2} \leq 1$

De l'autre coté, or $u\in[0,1]$ donc φ est positive et donc $\forall u\in[0,1]$ $\frac{u}{1+u^2} \geq 0$ donc φ est borné sur $[0,1]$

Soit $x \in [0,1]$ soit $n \in \mathbb{N}$

$g_n(x) = \psi(nx) \leq \frac{1}{2}$ pour tout n, x donc

$|g_n(x)| \leq \frac{1}{2}$ qui est intégrable sur $[0,1]$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 g_n(x) d\lambda(x) = \int_0^1 \lim\limits_{n \to +\infty} g_n(x) d\lambda(x) = \int_0^1 0 \, d\lambda(x) = 0.$

5.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 g_n(x) dx = \int_0^1 \frac{nx}{1+(nx)^2} d\lambda(x)$$

$t = nx \iff dt = n dx$ $\quad$ $nx = 0 \iff x = 0$, $nx = 1 \iff x = \frac{1}{n}$

$$\int_0^n \frac{t}{1+t^2} \frac{1}{n} dt$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^n \frac{t}{1+t^2} dt$$

$1+t^2 = x \iff 2t\,dt = dx$

$$= \frac{1}{n} \int_1^{1+n^2} \frac{1}{x} \frac{1}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2n} [\ln(x)]_1$$

$$= \frac{1}{2n} \ln(1+\frac{1}{n^2}) - \ln(1) = \frac{1}{2n} \ln(1+\frac{1}{n^2}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

3) 6) Soit $x \in]0,1]$ soit $n \in \mathbb{N}$

$f_n(x) = n \, \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$ pour $x \leq \frac{1}{n} \iff nx \leq 1 \iff n \leq \frac{1}{x}$

$\sup\limits_{n \geq 1} f_n(x) = n$ pour $n \leq \frac{1}{x}$

donc $\sup\limits_{n \geq 1} f_n(x) = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \geq \frac{1}{2x}$ qui n'est pas intégrable

donc le TCD ne s'applique pas.