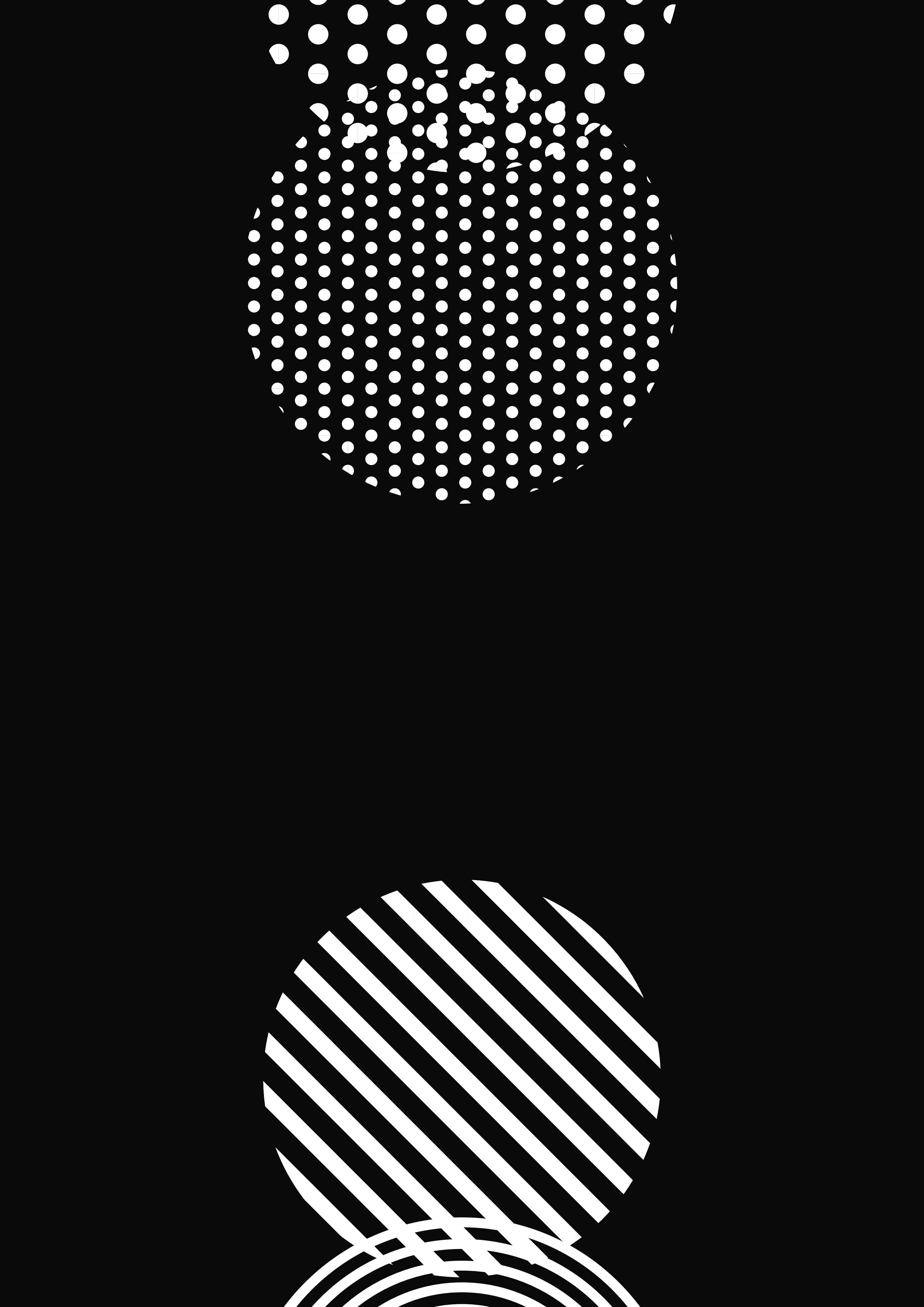

1. Introduisons une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\forall n\in\mathbb{N}$

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto \mathbb{1}_{[\frac{1}{n},1]}(x)\, x^{-\frac{1}{2}}$$

$\forall n\in\mathbb{N}$ $\forall x\in[0,1]$ $f_n(x)$ est positive car $x>0$ donc $\frac{1}{\sqrt{x}}>0$

et f_n est croissante.

donc le théorème de convergence monotone s'applique et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n d\lambda = \int_{[0,1]} f(x)d\lambda(x)$$

pour $n\in\mathbb{N}$ $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)d\lambda(x) = \int_{[\frac{1}{n},1]} x^{-\frac{1}{2}} d\lambda(x)$

$= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ car $x^{-\frac{1}{2}}$ continue sur $[\frac{1}{n},1]$ est un compact

$= \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}$

$= 2 - \frac{2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$

donc $x^{-\frac{1}{2}}$ est intégrable sur $[0,1]$

2. $\forall u\in]0,+\infty[$ $\forall x\in[0,+\infty[$

$xu \geq 0$ donc $0\leq e^{-xu}\leq 1$

donc $x^{-\frac{1}{2}}e^{-xu} \leq x^{-\frac{1}{2}}$ qui est intégrable sur $[0,1]$

pour u fixé $\frac{x^{-\frac{1}{2}}e^{-xu}}{e^{-xu}} = x^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

d'où $\exists T>1$ $C>0$ tq

$\forall x\geq T$ $x^{-\frac{1}{2}}e^{-xu} \leq Ce^{-xu}$

Donc $\int_1^T x^{-\frac{1}{2}}e^{-xu}dx + \int_T^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-xu}dx$

$\leq \int_1^T x^{-\frac{1}{2}}e^{-xu}dx + C\int_T^{+\infty} e^{-xu}dx < +\infty$

car $x\mapsto x^{-\frac{1}{2}}e^{-xu}$ est continue sur un compact $[1,T]$
donc $\int_1^T x^{-\frac{1}{2}}e^{-xu}dx$ finie et

$\int_T^{+\infty} e^{-xu}dx < +\infty$ car $x\mapsto e^{-xu}$ intégrable.

D'où g_u est intégrable sur $[0,+\infty[$

3. $\forall u \in]0,+\infty[\quad \forall x \in [0,+\infty[$

$$|f(u,x)| = \frac{|\cos(x)|}{u^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}} e^{-ux} \leq \frac{e^{-ux}}{u^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}} \quad \text{car} \quad |\cos(x)| \leq 1$$

$$\leq x^{-\frac{1}{2}} e^{-ux} \quad \text{car} \quad u^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \text{ positive et } u^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \geq x^{\frac{1}{2}}$$

donc $\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$

et $x \mapsto x^{-\frac{1}{2}} e^{-ux}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$
donc pour tout $u \in]0,+\infty[$

$\int_{[0,+\infty[} f(u,x)\,dx$ existe donc F est bien définie.

4. Soit $x \in [0,+\infty[$

$$\sup_{u \in]0,+\infty[} |f(u,x)| = \sup \frac{|\cos(x)|}{u^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}} e^{-ux}$$

$$\geq \sup \frac{|\cos(x)|}{u^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\geq \sup |\cos(x)| x^{\frac{1}{2}} = |\cos(x)| x^{\frac{1}{2}}$$

qui n'est pas intégrable. Donc il n'est pas possible de trouver φ qui majore $|f(u,x)|$ et soit intégrabl.

6. $J = [a,b]$ pour $u \in J$

$$\frac{|\cos(x)|}{u^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}} e^{-ux} \leq \frac{e^{-ax}}{a^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}} \leq e^{-ax} x^{-\frac{1}{2}} \quad \text{qui est intégrable sur } [a,b]$$

donc $u \mapsto f(u,x)$ étant continue sur $[a,b]$
et $x \mapsto |f(u,x)|$ étant intégrable sur $[0,+\infty[$ $\forall u \in [a,b]$
donc F est continue sur $[a,b]$

En faisant tendre a vers 0 et b vers $+\infty$ on obtient que F est continue sur $]0,+\infty[$.

5. (a) $\frac{\partial f}{\partial u}(u,x) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,x) = \cos(x)\,(u^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})^{-1} e^{-ux}$

$$= \cos(x) \left(-\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} (u^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})^{-2} e^{-ux} - x(u^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})^{-1} e^{-ux}\right)$$

(b) Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| = \left| = |\cos(x)| \left(-\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} (u^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})^{-2} e^{-ux} - x(u^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})^{-1} e^{-ux}\right)\right|$$

$$\leq \left|\left(-\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} (u^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})^{-2} e^{-ux} - x(u^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})^{-1} e^{-ux}\right)\right|$$

$$= \left| (u^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})^{-1}\left(-\tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\, e^{-ux}(u^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})^{-1} - x\, e^{-ux}\right)\right|$$

$$= (u^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})^{-1}\left|\left(-\tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\, e^{-ux}(u^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})^{-1} - x\, e^{-ux}\right)\right|$$

$$= (u^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})^{-1}\left(\tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}e^{-ux}(u^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})^{-1} + x\, e^{-ux}\right)$$

$$\leq (a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})^{-1}\left(\tfrac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}e^{-ax}(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})^{-1} + x\, e^{-ax}\right)$$

$$= e^{-ax}\left(\frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})^{2}} + \frac{x}{a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}\right) = \varphi_a(x)$$

$$= \varphi_a(x)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \varphi_a(x)\, \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x)$$

$$\varphi_a(x)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x) \leq \left(\frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})^{2}} + \frac{x}{a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}\right)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

$$\leq \frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}\ \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$ qui est intégrable sur $[0,+\infty[$

$$\varphi_a(x)\,\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x) = e^{-ax}\left(\frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})^{2}} + \frac{x}{a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}\right)\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$$

$$\leq e^{-ax}\left(\frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}} + \frac{x}{a^{\frac{1}{2}}}\right)\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x) \quad \in \mathcal{L}^1([0,+\infty[)$$

donc $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right| \leq \varphi_a(x) \quad \forall u \in I\ \forall x \in]0,+\infty[$

de plus $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)$ est continue
et $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)$ est mesurable et intégrable sur $]0,+\infty[$ d'où d'après le théorème de dérivabilité F est intégrable sur $[a,b]$. En faisant tendre a vers 0 et b vers $+\infty$ on obtient que F est intégrable sur $]0,+\infty[$ et

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u) = \int_{[0,+\infty[} \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\,dx$$