



$u \in [0, +\infty[$

$$\frac{C_n(1+u) e^{-u}}{u^{1/3}} \leq \frac{4u e^{-u}}{u^{2/3}} = 4e^{-u} u^{1/3}$$

Alors $e^{-u} u^{1/3}$ intégrable sur $]0, +\infty[$

Pour $x \leq 1$ $e^{-x} x^{1/3} \leq x^{1/3}$

$$\int_{[1/n, 1]} x^{1/3} d\lambda(x) = \int_{1/n}^1 x^{1/3} dx = \left[\frac{3}{4} x^{4/3} \right]_{1/n}^1 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{n} \right)^{4/3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4}$$

donc $e^{-x} x^{1/3}$ intégrable sur $]0, 1]$

pour $x > 1$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^{1/3} e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = x^2 x^{1/3} e^{-x} = \frac{x^{5/3}}{e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

donc $\exists T > 0$ tq $\forall x \geq T$ $x^{5/3} e^{-x} \leq \frac{2}{x^2}$

donc $\int_1^T x^{1/3} e^{-x} dx$ est finie car $x \mapsto x^{1/3} e^{-x}$ continue et $[1, T]$ est compact

pour $x \geq T$ $x^{1/3} e^{-x} \leq \frac{2}{x^2}$ avec $\frac{1}{x^2}$ intégrable

sur $]T, +\infty[$ donc par comparaison

$x \mapsto x^{1/3} e^{-x}$ intégrable sur $]T, +\infty[$

d'où $u x^{-1/3} e^{-x}$ intégrable sur $]0, +\infty[$.