



Exercice 1

$$1. \begin{cases} \text{longueur}([\])=0 \\ \text{longueur}(e::l) = 1 + \text{longueur}(l) \end{cases}$$

2. $\forall l_1, l_2 \in \text{liste}$

$$\begin{cases} \text{concat}(l_1, l_2) = e::\text{concat}(l_1, l_2) & \text{ty } e::l_1 = l_1 \text{ si } l_1 \neq [\] \\ \text{concat}([\], l_2) = \text{concat}(l_2, [\]) = l_2 \\ \text{concat}([\], [\]) = [\] \end{cases}$$

3) Soient $l_1, l_2 \in \text{liste}$

$$\begin{aligned} \text{longueur}(\text{concat}(l_1, [\])) &= \text{longueur}(l_1) \\ &= \text{longueur}(l_1) + \text{longueur}([\]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{longueur}(\text{concat}(l_1, e::[\])) &= \text{longueur}(e::\text{concat}(l_1, [\])) \\ &= 1 + \text{longueur}(\text{concat}(l_1, [\])) \\ &= \text{longueur}(l_1) + 1 \\ &= \text{longueur}(l_1) + \text{longueur}(l_2) \end{aligned}$$

$$P(l) = \forall l' \in \text{liste} \quad \text{longueur}(\text{concat}(l, l')) = \text{longueur}(l) + \text{longueur}(l')$$

$$\checkmark P([\]) = \text{longueur}(\text{concat}([\], l')) = \text{longueur}(l') \\ = \text{longueur}([\]) + \text{longueur}(l')$$

Supposons que pour l $P(l)$ est vrai

$$\text{longueur}(\text{concat}(x::l, l')) = \text{longueur}(x::\text{concat}(l, l'))$$

$$\begin{aligned} P(x::l) &= 1 + \text{longueur}(\text{concat}(l, l')) \\ &= \text{longueur}(l) + 1 + \text{longueur}(l') \end{aligned}$$

$$\text{longueur}(x::l) = 1 + \text{longueur}(l)$$

=

$$4. \quad P(l) \quad \forall l_2, l_3 \quad \text{concat}(l, \text{concat}(l_2, l_3)) = \text{concat}(\text{concat}(l, l_2), l_3)$$

$$\checkmark P[\epsilon] = \text{concat}(\text{concat}(\epsilon, l_2), l_3) = \text{concat}(l_2, l_3) \\ \text{concat}(\epsilon, \text{concat}(l_2, l_3)) = \text{concat}(l_2, l_3) \quad "$$

Supposons que $P(l)$ est vrai

$P(x::l)$:

$$\text{concat}(x::l, \text{concat}(l_2, l_3)) = x::\text{concat}(l, \text{concat}(l_2, l_3)) \\ \text{concat}(\text{concat}(x::l, l_2), l_3) = \text{concat}(x::\text{concat}(l, l_2), l_3) \\ = x::\underbrace{\text{concat}(\text{concat}(l, l_2), l_3)}_{= \text{concat}(l, \text{concat}(l_2, l_3))}$$

donc $P(x::l)$ est vrai.

Exercice 2

$$1. \quad P(l) \quad \text{longueur}(\text{rev}(l)) = \text{longueur}(l)$$

$$\checkmark P[\epsilon] : \text{longueur}(\text{rev}(\epsilon)) = \text{longueur}(\epsilon)$$

Supposons $P(l)$ vrai

$$\checkmark P(x::l) \quad \text{longueur}(\text{rev}(x::l)) \\ = \text{longueur}(\text{concat}(\text{rev}(l), x::[\epsilon])) \\ = \text{longueur}(\text{rev}(l)) + \text{longueur}(x::[\epsilon]) \\ = \text{longueur}(l) + 1$$

$$2. \quad P(l) \quad \forall l_2, \quad \text{rev}(\text{concat}(l_1, l_2)) = \text{concat}(\text{rev}(l_2), \text{rev}(l_1))$$

$$\checkmark P[\epsilon] : \quad \text{rev}(\text{concat}(\epsilon, l_2)) = \text{rev}(l_2) = \text{concat}(\text{rev}(l_2), \text{rev}(\epsilon))$$

$$P(x::l) \quad \text{rev}(\text{concat}(x::l_1, l_2)) \\ = \text{rev}(x::\text{concat}(l_1, l_2)) \\ = \text{concat}(\text{rev}(\text{concat}(l_1, l_2)), x::[\epsilon]) \\ = \text{concat}(\text{concat}(\text{rev}(l_2), \text{rev}(l_1)), x::[\epsilon]) \\ = \text{concat}(\text{rev}(l_2), \text{concat}(\text{rev}(l_1), x::[\epsilon]))$$

$$= \text{concat}(\text{rev}(l_1), \text{rev}(x::l))$$

✓

$$3) \quad P(l) \quad \text{rev}(\text{rev}(l)) = l$$

$$P([J]) \quad \text{rev}(\text{rev}([J])) = \text{rev}([J]) = [J]$$

✓

Supposons que $P(l)$ est vraie

$$\begin{aligned} P(x::l) \quad \text{rev}(\text{rev}(x::l)) &= \text{rev}(\text{concat}(\text{rev}(l), x::[J])) \\ &= \text{concat}(\text{rev}(x::[J]), \text{rev}(\text{rev}(l))) \\ &= \text{concat}(x::[J], l) \\ &= x::l \end{aligned}$$

✓

exercice 3

$\forall a \in \text{liste}$

$$P(l) \quad \text{aux}(l, a) = \text{aux}([J], \text{concat}(\text{rev}(l), a))$$

$$\begin{aligned} P([J]) \quad \text{aux}([J], a) &= a = \text{aux}([J], \text{concat}(\text{rev}([J]), a)) \\ &= \text{aux}([J], \text{concat}([J], a)) \\ &= \text{aux}([J], a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{aux}(x::l, a) &= \text{aux}(l, x::a) \\ &= \text{aux}([J], \text{concat}(\text{rev}(l), x::a)) \\ &= \text{aux}([J], \text{concat}(\text{concat}(\text{rev}(l), x::[J]), a)) \\ &= \text{aux}([J], \text{concat}(\text{rev}(x::l), a)) \end{aligned}$$

✓

$$\begin{aligned} \text{D'où} \quad \text{aux}(x::l, [J]) &= \text{aux}([J], \text{concat}(\text{rev}(x::l), [J])) \\ &= \text{aux}([J], \text{rev}(x::l)) = \text{rev}(x::l) \end{aligned}$$

Exercice 4

1. Pour $t = N(t_1, n, t_2)$ avec $n \in \mathbb{N}$, $t_1, t_2 \in \text{arbre}$

$$\begin{cases} \text{infixe}(E) = [] \\ \text{infixe}(t) = \text{concat}(\text{infixe}(t_1), n :: \text{infixe}(t_2)) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{1) } \left\{ \begin{array}{l} t = N(t_1, n, t_2) \\ \text{app}(x, E) = \text{faux} \\ \text{app}(x, t) = \begin{cases} \text{vrai} & \text{si } x = n \\ \text{app}(x, t_2) & \text{si } x > n \\ \text{app}(x, t_1) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right. \\ \text{2) } \left\{ \begin{array}{l} \text{app}(x, E) = \text{faux} \\ \text{app}(x, t) = \begin{cases} \text{vrai} & \text{si } x = n \\ \text{app}(x, t_2) \vee \text{app}(x, t_1) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right. \end{array}$$

3) a) oui
b) non

5)